

ORSAY
Série A, N°
N° D'ordre :
596

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le n° A.O. 4038

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Carlos MONTES LOZANO

Sujet : Instabilité d'anisotropie de température dans un
plasma sans collisions.

Description linéaire et évolution quasilinéaire.

Soutenue le 17 MARS 1970 devant la Commission d'examen :

MM. J.L. DELCROIX Président

J. DELLOUE

A. MANGENEY

D. QUEMADA

} Examinateurs

L.R.O. STOREY

ORSAY
Série A, N°
N° D'ordre :

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le n° A.O. 4038

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Carlos MONTES LOZANO

Sujet : Instabilité d'anisotropie de température dans un
plasma sans collisions.

Description linéaire et évolution quasilinéaire.

Soutenue le

devant la Commission d'examen :

MM. J.L. DELCROIX Président

J. DELLOUE

A. MANGENY

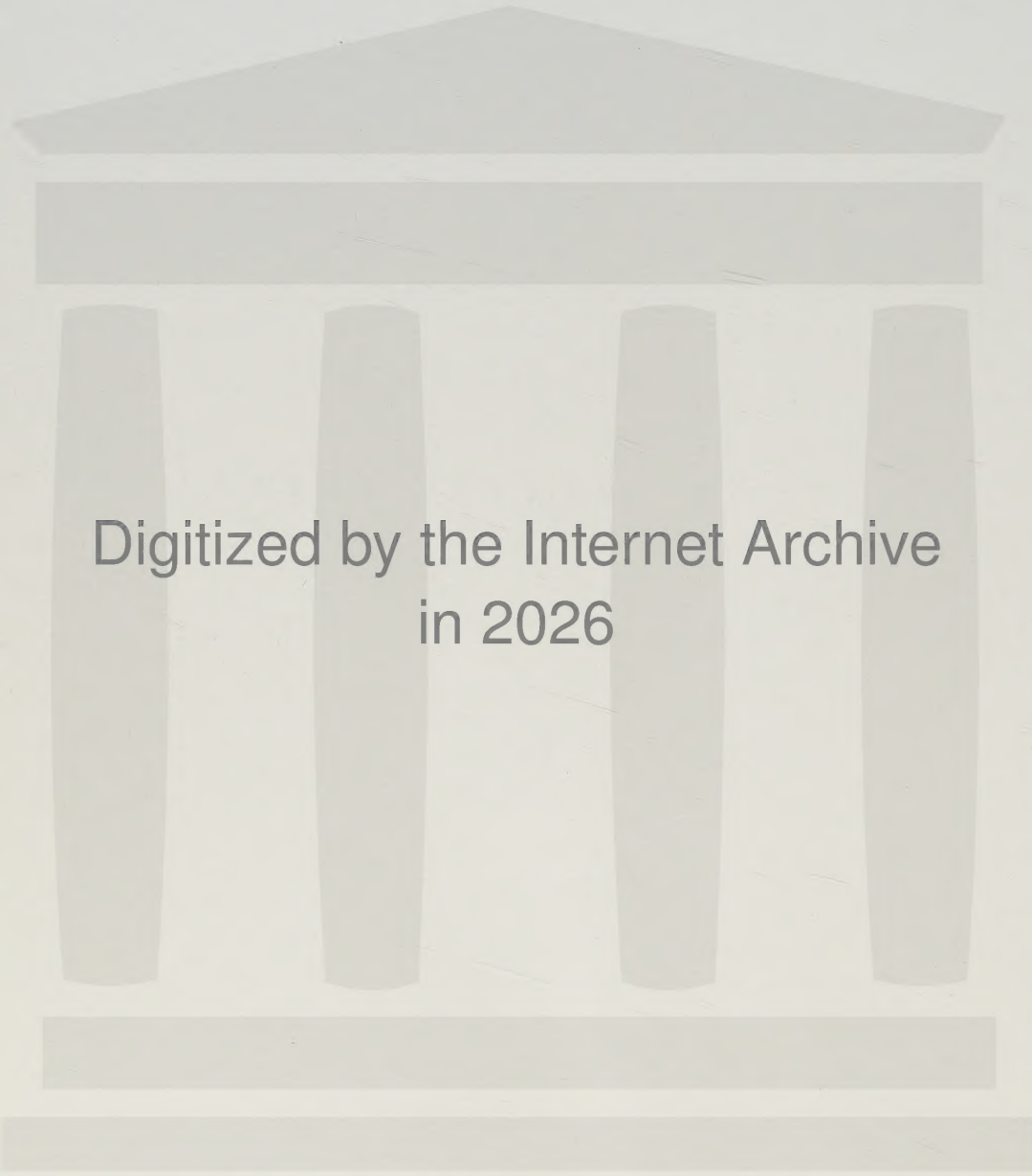
D. QUEMADA

} Examinateurs

L.R.O. STOREY



A M A R I A T E R E S A



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551504_0035

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.L.DELCROIX qui a bien voulu m'accueillir au Laboratoire de Physique des Plasmas pendant toute la durée de cette thèse.

Je remercie Monsieur G.KALMAN qui m'a initié à la recherche, qui m'a suggéré l'étude de cette instabilité et avec qui ce travail a été commencé.

J'exprime ma gratitude à Monsieur D.QUEMADA avec qui j'ai poursuivi l'étude et qui m'a fait d'intéressantes suggestions dans la première partie de ce travail.

Je remercie aussi très spécialement Monsieur G.DIENER qui a été à l'origine de la théorie quasilinéaire.

Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ma cordiale reconnaissance à Monsieur J.COSTE avec qui j'ai terminé ce travail. Son aide et son souci du sens physique des résultats m'ont été précieux. Je lui suis redevable de diverses idées nées au cours des discussions.

TABLE DES MATIERES

	pages
I N T R O D U C T I O N	1
P A R T I E I :	
CHAPITRE I : ETUDE PHYSIQUE DU MECANISME DE L'INSTABILITE, MODELE HYDRODYNAMIQUE	9
CHAPITRE II : DESCRIPTION DIELECTRIQUE DES MODES INSTABLES	15
1. Tenseur diélectrique d'un plasma à température anisotrope	15
2. Instabilité du mode I, purement transverse	20
3. Etude du mode II, à polarisation mixte	25
3.A. Existence du mode II, propriétés générales	26
3.B. Le mode II électronique	29
3.C. Le mode II couplé	32
P A R T I E II :	
RELAXATION QUASILINEAIRE D'UNE ANISOTROPIE DE TEMPERATURE	37
1. Equations quasilinéaires	38
2. Caractéristiques principales du processus de relaxation	46
A. Evolution de l'anisotropie	46
B. Evolution de l'énergie du champ turbulent	48
3. Validité de la théorie quasilinéaire	50
Existence d'échelles de temps séparées	51
Effets non linéaires	52

C O N C L U S I O N	54
---------------------------	----

APPENDICES :

A. Calcul du tenseur diélectrique.....	55
B. Relation de dispersion du mode couplé.....	59
C. Conservation de l'énergie, calcul de $\frac{dW_{CIN}}{dt} \equiv \frac{3}{2} n \frac{dT}{dt}$ et de $\frac{dT_{ }}{dt}$	63
D. Forme asymptotique des équations d'évolution de l'anisotropie $\epsilon(t)$ et du champ $W_B(t)$	70
E. Evaluation de $A = \int_0^1 dy y^m e^{\alpha y^p}$ pour $\alpha \rightarrow \infty$	74
F. Evaluation de la portée des corrélations.....	76

REFERENCES.....	81
-----------------	----

LEGENDE DES FIGURES	83
---------------------------	----

Figures : 10 ; 11 ; 12 (a), (b) et (c) ; 13 (a), (b) et (c) ; 16 ; 17 ; 18 (a), (b) et (c) ; 19 (a), (b) et (c) ; 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 (a), et (b).



I N T R O D U C T I O N

L'instabilité d'anisotropie de température que nous étudions dans ce travail a un caractère essentiellement magnétique : elle est due aux interactions des éléments de courant dans le plasma. Si on donne à ceux-ci une répartition initiale anisotrope dans l'espace, ils tendent à se grouper en paquets (pinchs microscopiques). Les différents porteurs de charge jouent évidemment des rôles analogues et peuvent simultanément contribuer au processus d'instabilité. L'importance de leurs contributions dépend de leurs masses, de leurs températures respectives ainsi que des anisotropies de température qu'on leur attribue. Nous considérons le cas simplifié (mais assez général) où seules les charges d'une espèce (nous avons choisi les électrons) déterminent l'instabilité. Ce sera par exemple le cas d'un plasma où la température électronique est supérieure ou comparable à la température ionique, les anisotropies de température de chaque espèce étant du même ordre de grandeur. Dans un tel cas les électrons sont dominants parce qu'ils sont les plus rapides. Encore faut-il remarquer que la dynamique des ions peut jouer un rôle, l'anisotropie de température pouvant déstabiliser le mode acoustique ionique (si $T_e \gg T_i$). Cet effet relativement secondaire étant excepté, l'instabilité est électro- nique, apériodique et à polarisation quasi transverse.

La distribution des vitesses ayant la symétrie cylindrique autour d'un axe $\hat{n}$, "axe d'anisotropie", on définit les températures électroniques $T_{\perp} = \frac{1}{2} m a^2$ et $T_{\parallel} = \frac{1}{2} m b^2$ respectivement perpendiculaire et parallèle à $\hat{n}$. L'ordre de grandeur du taux de croissance s de l'instabilité est donné par :

$$\left. \begin{aligned} s &\approx \frac{a}{c} \omega_0 & (T_{\perp} \gg T_{\parallel}) \\ s &\approx \frac{b}{c} \omega_0 & (T_{\perp} \ll T_{\parallel}) \end{aligned} \right\} \text{pour les fortes anisotropies}$$

et par

$$s \approx \frac{v_{th}}{c} \omega_o |\epsilon|^{3/2} \quad \text{pour les faibles anisotropies}$$

$$v_{th} \approx a \approx b \quad \text{étant la vitesse thermique}$$

$$c \quad \quad \quad " \quad \text{la vitesse de la lumière}$$

$$\omega_o = \left(\sum_s \frac{n_s q_s^2}{m_s \epsilon_o} \right)^{1/2} \quad \quad \quad " \quad \text{la fréquence plasma}$$

$$\epsilon = 1 - \frac{T_{||}}{T_{\perp}} \quad \quad \quad " \quad \text{le paramètre d'anisotropie}$$

Le plasma est supposé non collisionnel et non soumis à un champ magnétique extérieur. Les taux de croissance de l'instabilité étant relativement faibles, la condition d'absence de collisions coulombiennes impose des températures élevées et des densités basses. Cette condition s'écrit :

$T n^{-1/4} > 20 \{ \sqrt{T_{\perp}^2 + T_{||}^2} / |T_{\perp} - T_{||}| \}^{3/4}$. Il faut évidemment aussi que pour que l'instabilité soit observable, que le plasma soit libre d'instabilités plus violentes. Enfin le champ magnétique maximum acceptable est relativement faible ($\beta > 1$, pour des anisotropies moyennes). Il semble que ces différentes contraintes soient réalisées dans certains plasmas anisotropes en astrophysique, par exemple dans le vent solaire assez loin du soleil ⁽¹⁾. L'instabilité d'anisotropie de température pourrait y constituer un mécanisme dissipatif pour les ondes de choc sans collisions ⁽²⁾.

Les buts que nous nous sommes donnés à propos de cette instabilité sont les suivants :

I. Faire une étude complète des différents modes instables du plasma anisotrope (en tenant compte de la dynamique des ions).

II. Etudier la relaxation d'une anisotropie de température dans un plasma par couplage quasilinear des particules avec les modes instables.

Partie I : Les premières descriptions de l'instabilité de température sont dues à Weibel⁽³⁾ et Fried⁽⁴⁾. Elles sont du type hydrodynamique, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une approximation grandes longueurs d'onde de la solution exacte de l'équation de Vlasov. Elles ne concernent d'autre part que l'un des deux modes instables possibles, et elles conduisent à un

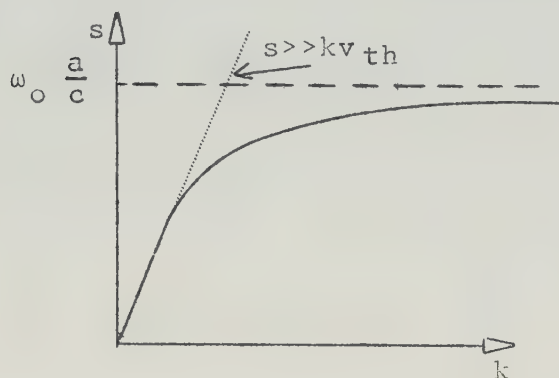


Fig.1 : spectre hydrodynamique

spectre $s(k)$ non limité et qui a la forme montrée sur la figure 1.

Cette approximation nécessite non seulement des longueurs d'onde grandes mais aussi des anisotropies fortes. En effet la relation de dispersion exacte (description Vlasov) fournit respectivement pour

les anisotropies moyennes et faibles : $s \sim k v_{th}$ et $s \ll k v_{th}$, relations qu'on ne peut manifestement pas obtenir dans une approximation hydrodynamique. Néanmoins le modèle hydrodynamique le plus simple a le mérite de montrer clairement le mécanisme physique de l'instabilité et nous l'exposerons dans le chapitre I.

Nous présentons dans le chapitre II une étude systématique de la relation de dispersion tirée de l'équation de Vlasov. On trouve dans la littérature plusieurs articles sur ce sujet ou des sujets similaires, mais qui ne fournissent que des résultats fragmentaires⁽⁵⁾⁻⁽¹²⁾. La plupart des résultats présentés dans la partie I de cette thèse ont été publiés dans la réf. ⁽¹³⁾.

Nous avons considéré un plasma Maxwellien à deux températures $T_{||}$ et $T_{\perp}$ pour chaque espèce de particules (avec la même anisotropie pour les électrons et les ions). Nous avons mis en

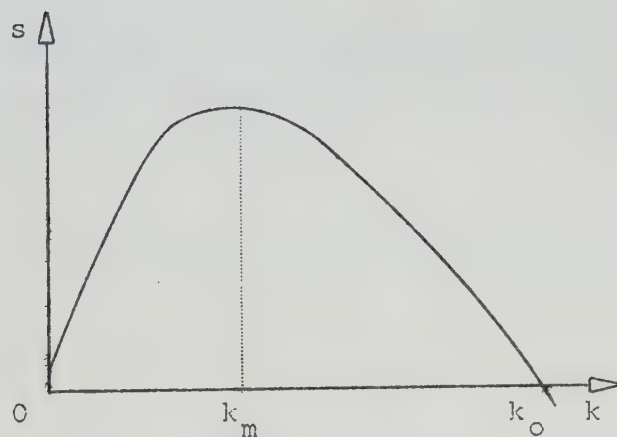


Fig.2 : Taux de croissance $s(k)$

évidence deux modes instables que nous baptiserons modes I et II, dont les domaines d'instabilité dans l'espace k sont limités ($k < k_0$). La variation du taux de croissance s en fonction de k a la forme représentée sur la figure 2.

- Le mode I est apériodique, purement transverse et électronique. Sa polarisation est représentée sur la figure 3.

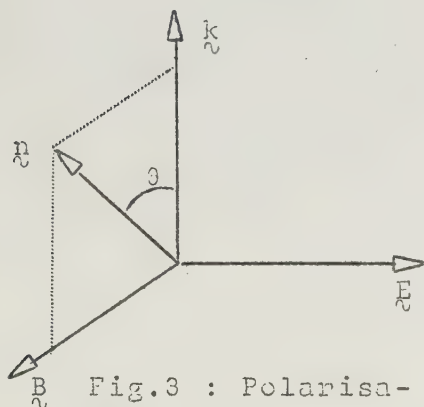


Fig.3 : Polarisation du mode I

C'est le mode qui a été précédemment décrit dans la littérature pour k parallèle à n ($\theta = 0$). Ce mode n'est instable que pour $T_{\perp} > T_{\parallel}$ (c'est la situation inverse de l'instabilité "garden hose" dans laquelle l'anisotropie a pour axe la direction du champ magnétique). Le domaine angulaire de l'instabilité a la forme représentée sur la figure 4.

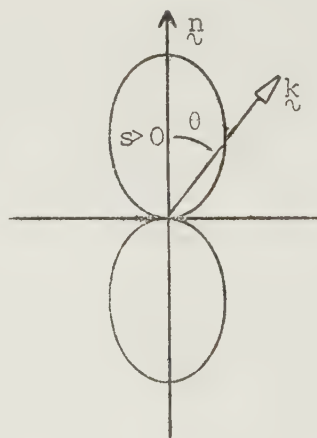


Fig.4 : Spectre angulaire du mode I

- Le mode II, dont nous avons montré l'existence, résulte pour les valeurs $\theta \neq 0$ du couplage des mouvements des particules parallèles et perpendiculaires à k . Dans la majeure partie du domaine d'instabilité ($0 < k < k_0$) ce mode est apériodique et sensiblement transverse ; sa polarisation étant représentée sur la

figure 5. Il s'identifie avec le mode I pour $\theta = 0$. On trouve que ce mode est instable quelles que soient les valeurs relatives de $T_{\parallel}$ et de $T_{\perp}$ (et en particulier pour $T_{\perp} < T_{\parallel}$), le spectre angulaire ayant la forme indiquée sur la figure 6.

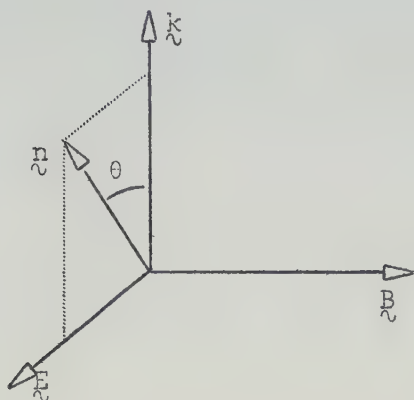


Fig.5 : Polarisation du mode II

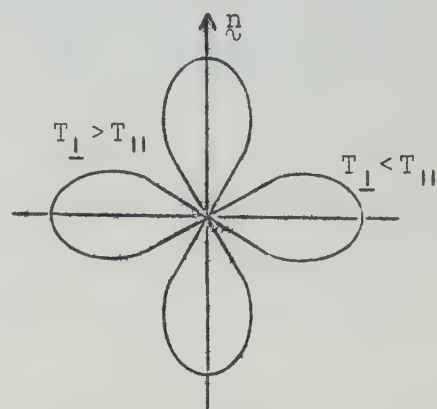


Fig.6 : Spectre angulaire du mode II

S'il existe un mode acoustique ionique dans le plasma (cas où $T_e \gg T_i$), on trouve que ce mode est destabilisé pour l'anisotropie de température : il se couple au mode II à l'extrémité de l'intervalle d'instabilité ($k \sim k_0$), la polarisation de ce mode devenant rapidement longitudinale. Ce couplage disparaît dans le cas d'une faible anisotropie.

Le cas limite d'une faible anisotropie est spécialement intéressant. Il est caractérisé par un faible taux de croissance tel que $s \ll k v_{th}$. Comme nous le montrerons dans la deuxième partie cette propriété rend possible un traitement quasilinéaire de l'évolution de l'anisotropie de température sous l'effet de l'instabilité.

Partie II : Ce type d'instabilité se prête assez bien, pour $|e| \ll 1$, à une théorie quasilinéaire, en dépit du fait qu'il n'existe pas de modèle hydrodynamique valable*. Il a été

* Un tel modèle existe pour l'instabilité aperiodique "garden-hose"(18).

possible, en utilisant un invariant approché des équations du mouvement, de réduire les équations quasilinéaires à une forme assez simple, et ainsi d'étudier quantitativement l'évolution de la relaxation et du champ turbulent. Nous avons, à cette occasion, fait une analyse détaillée des conditions de validité de la théorie quasilinéaire dans le cas assez délicat d'une instabilité apériodique. Une hypothèse simplificatrice importante du calcul a été de supposer que la fonction de distribution restait à chaque instant Maxwellienne à deux températures. Ceci revient essentiellement à dire que nous caractérisons le système par ses énergies moyennes transverse et longitudinale, et que la forme détaillée de la fonction de distribution ne joue pas un rôle important dans la relaxation des températures.

Nous avons principalement discuté les conditions suivantes de validité de la théorie quasilinéaire :

- a) Existence de deux échelles de temps séparées dans la statistique
- b) Le mouvement des particules dans le champ instable est faiblement non linéaire.

En ce qui concerne l'hypothèse (a) on suppose habituellement pour des instabilités apériodiques⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁸⁾ que la condition à satisfaire est $s \ll k v_{th}$, où s est le taux de croissance moyen des modes instables et $\bar{k}$ un nombre d'onde caractéristique. Dans le cas de notre instabilité ceci donne la condition suivante sur l'anisotropie initiale

$$\varepsilon^0 = 1 - T_{||}^0 / T_{\perp}^0 \ll 1$$

{où l'indice (0) indique la grandeur à l'instant initial}. En fait nous avons montré que $\bar{k}$ doit être plus précisément défini comme l'inverse de la portée spatiale des corrélations du champ turbulent. La condition (a) entraîne alors une limitation plus sévère de l'anisotropie, à savoir $\varepsilon^0 \ll 10^{-2}$.

La paramètre critique ρ qui entre dans la condition (b) est reliée à la déviation non linéaire de la trajectoire d'une particule pendant le temps de cohérence du champ. Nous avons évalué ρ et nous avons montré que, pendant la phase principale du processus quasilinear, où la condition (a) est satisfaite, ρ reste suffisamment petit.

Les principaux aspects de l'évolution quasilinear sont les suivants :

Nous supposons au temps initial que le plasma a une faible anisotropie dans l'espace des vitesses et un bas niveau de fluctuations. Dans une première phase, les modes instables décrits ci-dessus se développent avec leurs taux de croissance linéaires, l'anisotropie initiale restant pratiquement inchangée. Cette phase dure jusqu'à ce que l'énergie des fluctuations devienne assez grande pour interagir avec les particules. Nous trouvons que ceci se produit au bout du temps $t_{in} \approx 15 s_0^{-1}$, s_0 étant le taux de croissance maximum initial. A partir de cet instant l'anisotropie commence à varier rapidement (deuxième phase) et elle est réduite à environ 1/3 de sa valeur initiale sur un temps de l'ordre de $5 s_0^{-1}$. Au même moment l'énergie W_B du champ turbulent atteint la valeur maximum $W_{Bmax} \approx \frac{2}{27} n (\epsilon^0)^2 T_{\perp}^0$. Dans une dernière phase l'anisotropie résiduelle décroît lentement tandis que W_B s'annule.

A. Smith a publié très récemment une étude de la relaxation quasilinear de l'anisotropie de température⁽¹⁸⁾. Ce travail donne des résultats partiels et il soulève d'autre part des difficultés dans la résolution des équations quasilineaires. Nous en avons discuté en détail dans l'article en cours de publication⁽¹⁹⁾ sur lequel est basée cette deuxième partie. De plus la validité de la théorie n'est pas analysée.

P A R T I E I

C H A P I T R E I

ETUDE PHYSIQUE DU MECANISME DE L'INSTABILITE, MODELE HYDRODYNAMIQUE

Considérons à un certain instant une perturbation de champ magnétique dans le plasma dirigée selon Ox et variant harmoniquement en z , Oz étant la direction de l'axe d'anisotropie $\vec{n}$, soit

$$B_x = B e^{ikz} \quad (1)$$

Regardons l'évolution d'un système de courants thermiques fluctuants $\{\delta j_y, \delta j_z\}$ sous l'action de ce champ. Les courants δj_y , sous l'action de la force de Lorentz tendent à se grouper comme le montrent les figures 7(a) et 7(b).

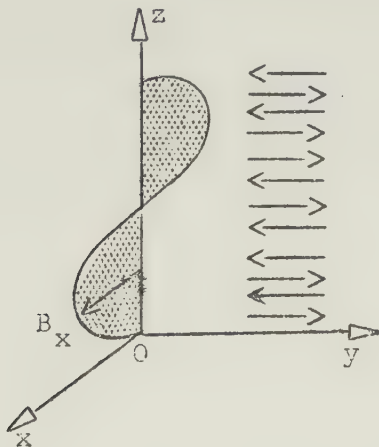


Fig.7(a) Etat initial

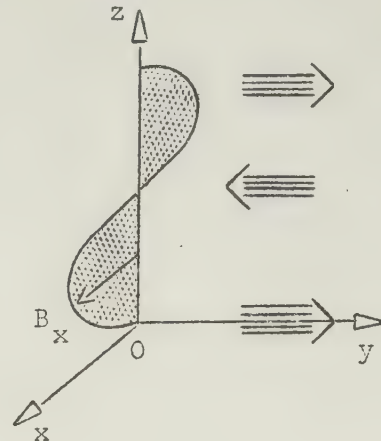


Fig.7(b) Etat final

c'est-à-dire qu'ils renforcent le champ initial : instabilité. D'autre part les courants initialement dirigés selon Oz sont défléchis, sous l'action de la force de Lorentz, dans la direction Oy : le sens de l'effet est représenté sur la figure 8(b). Ces déflexions aboutissent à la création d'une distribution

de courants j_y représentée sur la fig. 8(c), distribution qui tend donc à diminuer le champ initial : elle est stabilisatrice.

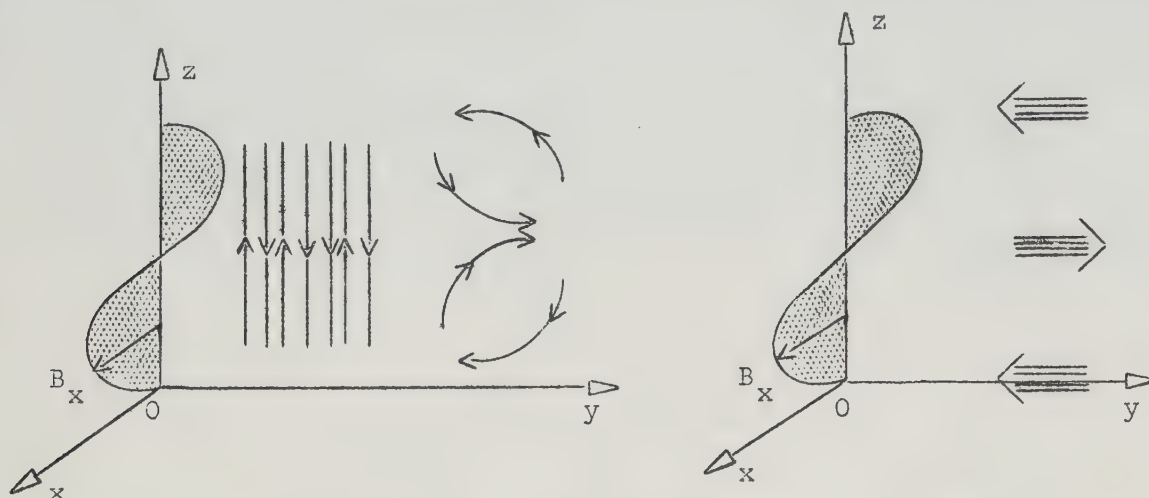


Fig.8(a) Etat initial 8(b) Evolution 8(c) Etat final

Comme on peut s'y attendre, et nous le montrerons par la suite, les deux effets décrits s'annulent mutuellement dans un système isotrope. D'autre part on peut prévoir que le plasma n'est instable que si l'énergie de fluctuation transverse (par rapport à l'axe d'anisotropie) est supérieure à l'énergie parallèle^(*) : $T_{\perp} > T_{\parallel}$.

Les raisonnements ci-dessus peuvent s'exprimer facilement dans la description hydrodynamique simplifiée⁽⁴⁾ suivante : la perturbation de champ magnétique sera supposée avoir la forme (1), c'est-à-dire indépendante du temps, et le plasma électronique (on néglige ici le mouvement des ions) a deux températures

(*) Bien entendu ce résultat n'est valable que pour le mode k polarisé dans le plan perpendiculaire à l'axe d'anisotropie (mode I) et ne peut pas être étendu à des modes k à polarisation différente (mode II).

$$\begin{aligned} \langle w_x^2 \rangle &= \langle w_y^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \\ \langle w_z^2 \rangle &= \frac{b^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

La variation de courant associée à la perturbation (1) est

$$j_y = nqv_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (3)$$

L'évolution de χ est liée au tenseur de pression cinétique ψ par l'équation macroscopique

$$nm \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \cdot \nabla \right) \chi = nq(E + \chi \times B) - \nabla \cdot \psi \quad (4)$$

Nous linéarisons l'éq.(4) par rapport à la perturbation de champ magnétique, et nous négligeons le champ électrique. Ce dernier ne joue pas un rôle essentiel dans la description qualitative de l'instabilité et nous en tiendrons compte plus loin. Nous obtenons donc l'équation suivante pour la composante v_y

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \langle w_y w_z \rangle \quad (5)$$

En dérivant (3) et (5) par rapport au temps, on a :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_x = nq\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_y = - nq\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \langle w_y w_z \rangle \quad (6)$$

d'où, en intégrant par rapport à z

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = - nq \frac{\partial}{\partial t} \langle w_y w_z \rangle \quad (7)$$

Le système étant sans collisions, $\frac{\partial}{\partial t} \langle w_y w_z \rangle$ peut être évalué simplement en utilisant l'opérateur d'évolution libre des particules dans le champ B_x , c'est-à-dire en écrivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle w_y w_z \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial t} (w_y w_z) \rangle \\ &= \langle \frac{\partial w_y}{\partial t} w_z \rangle + \langle w_y \frac{\partial w_z}{\partial t} \rangle\end{aligned}\quad (8)$$

w_y et w_z satisfaisant aux équations de mouvement

$$\begin{aligned}\frac{dw_y}{dt} &= \omega_c w_z \\ \frac{dw_z}{dt} &= -\omega_c w_y\end{aligned}\quad (9)$$

où $\omega_c = \frac{qB_x}{m}$ est la fréquence gyromagnétique. Nous écrivons donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w_y w_z \rangle = \frac{qB_x}{m} (\langle w_z^2 \rangle - \langle w_y^2 \rangle) = \frac{q}{2m} B_x (b^2 - a^2) \quad (10)$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \frac{a^2 - b^2}{2c^2} \omega_o^2 B_x \quad (11)$$

La perturbation de champ magnétique varie dans le temps avec un taux de croissance

$$s = \frac{a}{\sqrt{2} c} \varepsilon^{1/2} \omega_o \quad (12)$$

où $\varepsilon = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{T_{||}}{T_{\perp}}$ est le paramètre d'anisotropie. On vérifie que l'instabilité existe sous la condition $T_{\perp} > T_{||}$.

Si l'on tient compte du champ électrique associé au champ magnétique B_x , l'équation (3) doit être remplacée par les deux équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= \mu_o j_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}\end{aligned}\quad (13)$$

et l'évolution de l'instabilité devient non locale dans l'espace. L'incrément d'instabilité s d'un mode k dépend alors de k . Il satisfait la relation de dispersion suivante

$$s^4 + (\omega_0^2 + k^2 c^2) s^2 - k^2 \frac{a^2 - b^2}{2} \omega_0^2 = 0 \quad (14)$$

équation dont la solution réelle est donnée par

$$s = \left\{ \frac{1}{2} \{ (\omega_0^2 + k^2 c^2)^2 + 2(a^2 - b^2) \omega_0^2 k^2 \}^{1/2} - \frac{1}{2} (\omega_0^2 + k^2 c^2) \right\}^{1/2} \quad (15)$$

En tenant compte de l'inégalité

$$(a^2 - b^2) \omega_0^2 k^2 \ll (\omega_0^2 + k^2 c^2)^2$$

toujours satisfaite puisque $(a^2 - b^2) \ll c^2$, on obtient la solution approchée

$$s \approx \frac{k a \varepsilon^{1/2}}{2^{1/2} (1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2})^{1/2}} \quad (16)$$

Comme nous le vérifierons plus loin l'expression (11) fournit l'ordre de grandeur du taux de croissance maximum donné par la théorie diélectrique exacte dans le cas d'une forte anisotropie. D'autre part l'expression (16) est une bonne approximation pour une forte anisotropie et dans le domaine des k petits ($k < \frac{\omega_0}{c}$). La courbe de dispersion correspondant à l'équation (16) a été représentée sur la figure 1. Elle ne présente pas de maximum tendant asymptotiquement vers la limite

$s(k \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\omega_0 a}{\sqrt{2} c} \varepsilon^{1/2}$. Notons que le modèle hydrodynamique pourrait être amélioré en tenant compte de l'équation de l'énergie : on trouve alors un maximum pour s . Cependant le domaine d'instabilité ne peut pas être complètement décrit (en particulier la limite correcte de ce domaine ($k = k_0$, $s(k_0) = 0$) ne peut

pas être obtenu dans l'approximation hydrodynamique). Nous donnons au chapitre suivant la forme exacte de la courbe de dispersion dans le cas d'une forte anisotropie.

o o
o

C H A P I T R E I I

DESCRIPTION DIELECTRIQUE DES MODES INSTABLES

1. TENSEUR DIELECTRIQUE D'UN PLASMA A TEMPERATURE ANISOTROPE

Nous considérons un plasma infini et homogène. La réponse linéaire du plasma à une perturbation électromagnétique extérieure est convenablement décrite à l'aide du tenseur diélectrique $\epsilon_0 \epsilon_{\omega}$ défini par la relation

$$\vec{j} = - i \epsilon_0 \omega (\epsilon_{\omega} - \frac{1}{\omega_p^2}) \cdot \vec{E} \quad (17)$$

où $\vec{j}$ est le courant produit par la perturbation de champ électrique $\vec{E}$.

Le comportement collectif d'un plasma complètement ionisé - dans lequel il y a un grand nombre de particules à l'intérieur d'une sphère de Debye - est gouverné par l'équation de Vlasov. En absence d'un champ magnétique extérieur la forme linéarisée de l'équation s'écrit (relativement à une seule espèce de particules) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \{ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (18)$$

où $F(\vec{v})$ est la fonction de distribution anisotrope à l'équilibre, normalisée à l'unité, et $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ la perturbation de cette fonction de distribution, au premier ordre. Dans le cas anisotrope, le vecteur gradient $\partial F / \partial \vec{v}$ n'est plus colinéaire à $\vec{v}$, et le terme $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$ n'est plus nul, à l'inverse du cas isotrope. C'est ce terme qui est responsable de l'instabilité.

Pour une perturbation en $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ et en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, on obtient

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{-i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{q}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} \{ \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \} \right\} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \quad (19)$$

soit en développant les produits vectoriels et en explicitant les composantes

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{-iq}{m} \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu v_\nu}{\omega - k_\lambda v_\lambda} \right] \frac{\partial F}{\partial v_\mu} E_\nu \quad (20)$$

où on a adopté la convention de sommation sur les indices répétés.

Le courant dû à cette perturbation est

$$j_\alpha = nq \int v_\alpha f_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{v} = -i \frac{nq^2}{m\omega} \int (v_\alpha \delta_{\mu\nu} + \frac{v_\alpha v_\nu k_\mu}{\omega - k_\lambda v_\lambda}) \frac{\partial F}{\partial v_\lambda} d\mathbf{v} E_\nu \quad (21)$$

En comparant (21) avec la relation (17), écrite à l'aide de composantes

$$j^\alpha = -i \epsilon_0 \omega (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) E_\beta$$

on en déduit

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int v_\alpha (\delta_{\mu\beta} + \frac{k_\mu v_\beta}{\omega - k_\lambda v_\lambda}) \frac{\partial F}{\partial v_\mu} d\mathbf{v} \quad (22)$$

Après intégration par parties de (22) et en supposant que F s'annule à l'infini, l'expression du tenseur diélectrique devient :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int \left[k^2 \frac{v_\alpha v_\beta}{(\omega - k_\lambda v_\lambda)^2} + \frac{v_\alpha k_\beta + v_\beta k_\alpha}{\omega - k_\lambda v_\lambda} \right] F d\mathbf{v} \quad (23)$$

L'expression (23) se généralise immédiatement au cas d'un plasma à plusieurs espèces s de particules :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left\{ \delta_{\alpha\beta} + \int \left\{ k^2 \frac{v_{s,\alpha} v_{s,\beta}}{(\omega - k_\lambda v_{s,\lambda})^2} + \frac{v_{s,\alpha} k_\beta + v_{s,\beta} k_\alpha}{\omega - k_\lambda v_{s,\lambda}} \right\} F_s d\mathbf{v}_s \right\} \quad (24)$$

avec des notations évidentes.

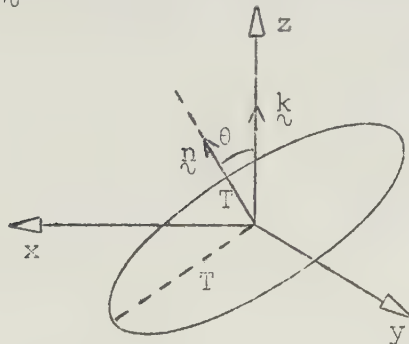
La relation de dispersion est obtenue en annulant le déterminant :

$$\left| \left(\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) N^2 + \epsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) \right| \quad (25)$$

où $N = \frac{kc}{\omega}$ est l'indice de réfraction. On prendra k réel ; les solutions en général complexes, $\omega(k)$ de la relation de dispersion fournissent les modes propres du plasma.

Fonction de distribution et système de référence :

Nous caractérisons l'anisotropie du système par une fonction de distribution maxwellienne à deux températures, ce qui représente une situation physique assez générale. Si on définit $\hat{n}$ comme le vecteur unitaire selon la direction de l'axe principal d'anisotropie (Fig.9), la



fonction de distribution prend la forme pour chaque espèce s de particules :

Fig.9 : Système de référence

$$F_s(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} a_s^2 b_s} e^{-\left[\frac{(\hat{n} \times \mathbf{v})^2}{a_s^2} + \frac{(\hat{n} \cdot \mathbf{v})^2}{b_s^2} \right]} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2} a_s^2 b_s} e^{-\left[\frac{v^2}{a_s^2} + \frac{\epsilon_s}{b_s^2} (\underline{n} \cdot \underline{v})^2 \right]} \quad (27)$$

où a_s et b_s sont respectivement les vitesses thermiques perpendiculaire et parallèle à $\underline{n}$ et définient les températures

$$T_{\perp, s} = \frac{m_s}{2} \langle (\underline{n} \times \underline{v})^2 \rangle = \frac{1}{2} m_s a_s^2 \quad (28)$$

$$T_{\parallel, s} = m_s \langle (\underline{n} \cdot \underline{v})^2 \rangle = \frac{1}{2} m_s b_s^2 \quad (29)$$

et où ϵ_s est le paramètre d'anisotropie défini par

$$\epsilon_s = 1 - \frac{b_s^2}{a_s^2} = 1 - \frac{T_{\parallel, s}}{T_{\perp, s}} \quad (30)$$

Nous utilisons le système de référence de la figure 9 où le vecteur nombre d'ondes $\underline{k}$ est selon Oz et fait un angle θ avec l'axe principal d'anisotropie $\underline{n}$.

Nous prenons le plan $(\underline{n}, \underline{k})$ comme plan xOz. Dans ce système de référence la relation de dispersion se factorise :

$$(\epsilon_{yy} - N^2) \{ (\epsilon_{xx} - N^2) \epsilon_{zz} - (\epsilon_{xz})^2 \} = 0 \quad (31)$$

L'équation

$$\epsilon_{yy} - N^2 = 0 \quad (32)$$

détermine un mode purement transverse, que nous avons appelé mode I, polarisé dans la direction Oz, perpendiculaire à la fois à $\underline{k}$ et à $\underline{n}$. L'équation

$$(\epsilon_{xx} - N^2) \epsilon_{zz} - (\epsilon_{xz})^2 = 0 \quad (33)$$

définit un mode couplé transverse-longitudinal, appelé mode II, polarisé dans le plan $(\underline{n}, \underline{k})$. La polarisation P de ce mode est donné par la relation

$$P = \frac{|E_{\parallel}|}{|E_{\perp}|} = \left| \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \right| \quad (34)$$

Expression du tenseur :

Pour des fonctions de distribution du type (27) des deux espèces s de particules (électrons et ions), et en se donnant la même anisotropie, $\epsilon_e = \epsilon_i = \epsilon$, pour les deux espèces, on obtient les expressions suivantes des éléments non nuls du tenseur diélectrique (24) (cf. Appendice A) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} B^2 Z'(z_s) - A^2 [1 + (1 - z_s^2) Z'(z_s)] \right\} \\ \epsilon_{yy} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{a_s^2}{2u_s^2} Z'(z_s) \right] \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= A \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - z_s^2 \right) Z'(z_s) \right] \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} z_s^2 Z'(z_s) \end{aligned} \quad (35)$$

où :

$Z'(z_s)$ est la dérivée de la fonction de dispersion du plasma tabulée par Fried et Conte^{(20)*} ;

* Rappelons que $Z'(z_s)$ satisfait l'équation différentielle

$$Z'(z_s) = -2\{1 + z_s Z(z_s)\} \text{ où } Z(z_s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{t - z_s}$$

u_s représente une sorte de vitesse thermique effective définie par

$$u_s = (a_s^2 \sin^2 \theta + b_s^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (36)$$

A et B les paramètres

$$A = \frac{(a_s^2 - b_s^2) \sin \theta \cos \theta}{u_s^2} = \frac{\epsilon \sin \theta \cos \theta}{1 - \epsilon \cos^2 \theta} \quad (37)$$

$$B = \frac{a_s b_s}{u_s^2} = \frac{(1 - \epsilon)^{1/2}}{1 - \epsilon \cos^2 \theta} \quad (38)$$

et z_s la variable complexe

$$z_s = \frac{\omega}{k u_s} = x_s + i y_s \quad (39)$$

2. INSTABILITE DU MODE I, PUREMENT TRANSVERSE

L'équation (32) définit le mode I, mode transverse polarisé selon Oy (cf. Fig.3). Remplaçant ϵ_{yy} par son expression (35), on obtient la relation de dispersion

$$1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} \frac{a_s^2}{2u_s^2} Z'(z_s) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \quad (40)$$

où $\omega_o^2 = \omega_{oe}^2 + \omega_{oi}^2$. On peut démontrer, en utilisant la théorie de Nyquist, qu'une relation de dispersion du type (40) conduit à une instabilité essentielle ($Wu^{(10)}$). Nous recherchons donc une solution de (40) pour k réel et ω purement imaginaire, c'est-à-dire pour :

$$x_s = 0 \quad z_s = i y_s \neq 0 \quad (41)$$

On connaît⁽²⁰⁾ la forme explicite de la fonction de dispersion du plasma pour un argument purement imaginaire (cf. Fig. 10) :

$$Z'(iy) = -2G(y) = -2\left\{1 - \sqrt{\pi} y e^{y^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt\right)\right\} \quad (42)$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (40) sous la forme :

$$\sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} \frac{a_s^2}{u_s^2} G(y_s) - 1 = \frac{k^2 c^2}{\omega_o^2} + \frac{s^2}{\omega_o^2} \quad (43)$$

où le dernier terme du membre de droite peut être négligé en vertu des hypothèses $s^2 \ll \omega_o^2$, $s^2 \ll k^2 c^2$. Les anisotropies relatives aux deux espèces de particules étant supposées égales, on a $\frac{u_e}{a_e} = \frac{u_i}{a_i} = \frac{u}{a}$. D'autre part l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\omega_{oi}^2}{\omega_o^2} G(y_i) \ll \frac{\omega_{oe}^2}{\omega_o^2} G(y_e) \quad (44)$$

Il en résulte que l'instabilité du mode I est due principalement aux électrons, et l'équation (43) peut s'écrire

$$G(y) = \frac{u^2}{a^2} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_o^2}\right) \quad (45)$$

les variables non indicées correspondant aux électrons. La fonction $G(y)$ est monotone décroissante avec $G(0) = 1$. L'équation (45) fournit donc une solution $y = y(k)$ pour tout k , et il existe des valeurs $y(k) > 0$ instables dès que $\frac{u}{a} < 1$. Par conséquent le plasma est instable si

$$a^2 > b^2 \quad \text{ou} \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (46)$$

Sur la figure 11 on a représenté le taux de croissance $s = kuy(k)$ pour différentes valeurs du paramètre $\frac{u}{a}$. On voit que

s s'annule pour les deux valeurs de k : $k = 0$ ($y > 0$) et $k = k_0$ ($y = 0$), qui délimitent l'intervalle d'instabilité. Pour $k < k_0$ le système est instable, k_0 étant défini (cf. éq. 45) par

$$\frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2} = \frac{a^2}{u^2} - 1 = \frac{\epsilon \cos^2 \theta}{1 - \epsilon \cos^2 \theta} \quad (47)$$

Dans le cas plus général où les anisotropies des différentes espèces sont inégales le domaine d'instabilité est défini par

$$\frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} < \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} \frac{a_s^2}{u_s^2} - 1 \quad (48)$$

condition qui met en évidence la contribution des deux porteurs de charge. Même si la distribution des vitesses des électrons est isotrope, l'anisotropie des ions conduit à une instabilité. L'expression (47) permet de définir la courbe $k_0(\theta)$ qui limite le domaine d'instabilité dans le plan polaire des k . Nous représentons $k_0(\theta)$ sur la figure 12 pour des anisotropies faible (a), moyenne (b) et forte (c). On y constate (l'expression (47) le montre) que le mode I est instable dans tout le domaine angulaire (à l'exception de $\theta = \pm \pi/2$).

Notons que les courbes représentées sur la figure 11 sont tracées à $\frac{u}{a}$ constant ($\frac{u}{a} = 1 - \epsilon \cos^2 \theta$) c'est-à-dire que chaque courbe a un couple quelconque de valeurs de ϵ et θ telles que

$$\epsilon = \frac{\text{const}}{\cos^2 \theta}$$

sous réserve de satisfaire à la condition (46). On voit donc que pour obtenir un même taux de croissance il faut une anisotropie plus élevée si on augmente θ .

Taux de croissance maximum :

Le résultat le plus notable est l'existence pour tout θ d'un taux de croissance maximum s_m proportionnel à l'anisotropie et de l'ordre de $\omega_0 \frac{a}{c}$ pour des anisotropies moyennes. Le taux s_m et le nombre d'onde associé k_m sont définis par l'équation (45) et par l'équation $ds/dk = 0$. Cette dernière est obtenue en différentiant la relation de dispersion par rapport à k , soit :

$$2 \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} = - \frac{a^2}{u^2} y G'(y) = \frac{a^2}{u^2} \{1 - (1+2y^2)G(y)\} \quad (49)$$

Le système des deux équations (45) et (49), définissant s_m (ou y_m) et k_m peut s'écrire aussi sous la forme

$$G(y) = \frac{1 + 2 \frac{u^2}{a^2}}{2y^2 + 3} \quad (50)$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} = \frac{\frac{a^2}{u^2} - 1 - 2y^2}{2y^2 + 3} \quad (51)$$

Nous avons représenté sur la figure 13 les diagrammes angulaires du taux de croissance maximum s_m respectivement pour des anisotropies faible, moyenne et forte.

Résultats analytiques relatifs aux anisotropies fortes et faibles :

Dans le cas limite d'une forte anisotropie $\frac{u^2}{2} \ll 1$, il est possible de résoudre algébriquement l'équation^a (50) en prenant les trois premiers termes du développement asymptotique de la fonction $G(y)$

$$G(y) \approx \frac{1}{2y^2} - \frac{3}{4y^4} + \frac{15}{8y^6} - \frac{105}{16y^8} \quad (y \rightarrow \infty) \quad (52)$$

On obtient ainsi :

$$y_m^2 \approx \frac{a}{u}, \quad \frac{k_m^2}{\omega_0^2} \approx \frac{a}{2u}, \quad s_m \approx \frac{a}{\sqrt{2}c} \omega_0 \left(\frac{1 - \frac{3}{2} \sin \theta}{1 + 2 \sin \theta} \right) \quad (53)$$

expressions qui sont valables pour $\varepsilon \rightarrow 1$ et jusqu'à $\theta \lesssim 10^\circ$ (région où $y^2 \gg 1$). La forme du spectre pour les fortes anisotropies (montrée sur la figure 14) diffère appréciablement de celle obtenue par la théorie hydrodynamique (cf. fig. 1).

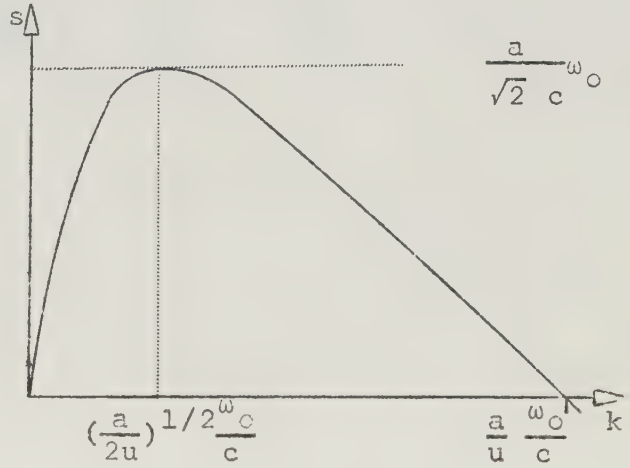


Fig.14 : Spectre pour les anisotropies fortes

Dans le cas d'une faible anisotropie, $\varepsilon \ll 1$, il est possible de donner une forme analytique simple de la relation de dispersion (45). En effet, les solutions instables ($s > 0$, $y > 0$), vérifient $y \ll 1$ et on peut développer en série $G(y)$ autour de $y = 0$

$$G(y) = 1 - \sqrt{\pi} y + 2y^2 - \sqrt{\pi} y^3 \dots \quad (54)$$

En ne conservant que les termes linéaires en y et en ε , l'équation (45) devient

$$s = \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \left(\varepsilon \cos^2 \theta - \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} \right) \quad (55)$$

L'expression (55) fournit immédiatement k_0 , k_m et

s_m

$$k_o = \frac{\omega_o}{c} \epsilon^{1/2} \cos \theta \quad (56)$$

$$k_m = \frac{k_o}{\sqrt{3}} = \frac{\omega_o}{c} \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/2} \cos \theta \quad (57)$$

$$s_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{c} \omega_o \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{3/2} \cos^3 \theta \quad (58)$$

3. ETUDE DU MODE II, A POLARISATION MIXTE

Ce mode est défini par la relation de dispersion (33), et sa polarisation dans le cas général est la suivante

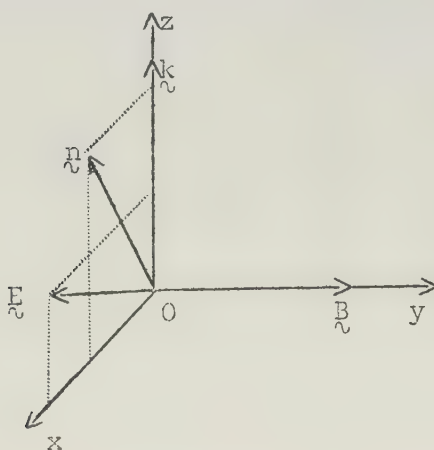


Fig.15 : Polarisation du mode II

En propagation parallèle ce mode se décompose en un mode purement transverse (E_0 sur Ox) et un mode longitudinal stable. En propagation oblique il peut exister un couplage entre ces deux modes si l'anisotropie n'est pas trop faible. S'il existe un mode longitudinal faiblement amorti en basse fréquence (c'est le cas d'une onde acoustique ionique pour un plasma où $T_e \gg T_i^{(21)}$), on peut s'attendre à ce que ce couplage déstabilise ce mode. Dans le cas d'une faible anisotropie le couplage n'a pas lieu et le mode présente une polarisation transverse (cf. Fig.5).

3A. Existence du mode II, propriétés générales

La courbe de dispersion du mode II a une forme analogue à celle du mode I, le domaine du mode instable essentiel étant limité par un k_0 marginal. Nous allons démontrer qu'à la différence du mode I, ce mode est instable dans le plasma quelque soient l'anisotropie et les températures des différentes espèces, pourvu qu'il y ait une anisotropie de température. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe toujours une valeur $k_0 > 0$ marginale pour laquelle $s(k_0) = 0$ et $(ds/dk)_{k_0} \neq 0$.

La relation de dispersion du mode II, d'après (33) et (35) s'écrit :

$$\left\{ \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} \left[1 - A^2 - \{ 2A^2(1-z_s^2) - B^2 \} \frac{Z'(z_s)}{2} \right] \right\} \quad (59)$$

$$\left\{ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} z_s^2 Z'(z_s) \right\} + A^2 \left\{ \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} - z_s^2 \right) Z'(z_s) \right\} \right\}^2 = 0$$

En négligeant les termes ω^2/ω_0^2 comme pour le mode I, la relation de dispersion pour ω imaginaire pur, c'est-à-dire pour $z_s = iy_s$ et $Z'(z_s) = -2G(y_s)$, est donnée par

$$\left\{ \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} + 1 - A^2 + \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} \{ 2A^2(1+y_s^2) - B^2 \} G(y_s) \right\} \quad (60)$$

$$\left\{ \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} y_s^2 G(y_s) \right\} - A^2 \left\{ 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega_0^2} (1+2y_s^2) G(y_s) \right\}^2 = 0$$

Dans la limite $y_s \rightarrow 0$, la relation de dispersion (60) prend la forme

$$D(y, A) \equiv A^2 - A_0^2 + \sqrt{\pi} y \left[\frac{1 + \sqrt{mT}}{1 + m} (2A^2 + B^2) - \frac{1 + \frac{T^{3/2}}{m^{1/2}}}{1 + T} (A^2 - A_0^2 + \alpha A^2) \right] \quad (61)$$

où $y = y_e$, $m = m_e/m_i$, $T = T_e/T_i$, $\Lambda = \frac{kc}{\omega_0}$

et
$$\Lambda_0^2 = B^2 - A^2 - 1 + \alpha A^2$$

$$\alpha = \frac{\pi(1 + \sqrt{mT})^2}{2(1+m)(1+T)}$$

D'après l'équation (61) k_0 est donné par $\Lambda^2 = \Lambda_0^2$, soit :

$$\frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2} = B^2 - A^2 - 1 + \frac{\pi(1 + \sqrt{mT})^2}{2(1+m)(1+T)} A^2 \quad (62)$$

Le dernier terme de (62) étant positif, une condition suffisante d'existence d'un k_0 est qu'il existe un angle θ vérifiant l'inégalité :

$$B^2 - A^2 - 1 = \frac{\varepsilon \cos 2\theta - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}{(1 - \varepsilon \cos^2 \theta)^2} > 0 \quad (63)$$

Cette inégalité est effectivement réalisée car :

pour $1 > \varepsilon > 0$, on peut trouver θ tel que $\cos^2 \theta > \frac{1}{2-\varepsilon}$ (64)

et pour $\varepsilon < 0$, on peut trouver θ tel que $\cos^2 \theta < \frac{1}{2-\varepsilon}$ (65)

La condition d'intersection de la courbe $s(k)$ avec l'axe des k en $k = k_0$, soit $(ds/dk)_{k_0} \neq 0$, s'écrit :

$$\frac{ds}{dk} = - \left(\frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial D}{\partial k} \right) / \left(\frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \quad (66)$$

soit, dans la limite $y \rightarrow 0$, $k \rightarrow k_0$

$$\left(\frac{ds}{dk}\right)_{k=k_0, y=0} = - \frac{\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2} u}{\left(\frac{1+\sqrt{mT}}{1+m}\right)(2A^2+B^2) - \frac{\pi}{2} \frac{(1+\frac{T^2}{\sqrt{mT}})(1+\sqrt{mT})^2}{(1+m)(1+T)^2} A^2} \quad (67)$$

expression qui est effectivement différente de zéro si $k_0 \neq 0$ (C.Q.F.D.). Remarquons que le fait de trouver une instabilité du mode II indifféremment pour $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ou pour $T_{\perp} < T_{\parallel}$ est due au fait que la relation de dispersion (59) est invariante dans le changement $\{T_{\perp}/T_{\parallel}, \theta/(\frac{\pi}{2} - \theta)\}$.

La relation de dispersion (59) a en général des solutions compliquées.

Dans le cas d'une propagation axiale ($\theta = 0$) la courbe de dispersion possède quatre branches représentant :

- (a) l'instabilité essentielle transverse
- (b) l'éventuel mode longitudinal lent (acoustique ionique)
- (c) le mode rapide plasma électronique
- (d) le mode rapide électromagnétique transverse

Ces deux derniers sont pratiquement inaltérés par l'anisotropie de température.

Dans le cas d'une propagation oblique ($\theta \neq 0$) on s'attend à ce que les modes rapides restent inaltérés, tandis que pour θ supérieur à un certain angle limite, l'interaction entre les modes lents (a) et (b) devienne assez forte pour les coupler.

Nous allons considérer deux cas limites :

- 1) Le cas d'un plasma où la dynamique des ions ne joue pas de rôle : nous considérerons un plasma électronique neutralisé par

un fond continu de charge positive (ce cas doit être associé à des valeurs nulles des paramètres m et T). Nous appellerons alors ce mode instable mode II électronique.

2) Le cas d'un plasma où $T_e \gg T_i$, c'est-à-dire où il existe le mode acoustique ionique faiblement amorti. Nous appellerons alors ce mode instable mode II couplé.

3B. Le mode II électronique

Comme le mode I ce mode est à fréquence purement imaginaire. Sa relation de dispersion est donnée par l'équation (60) avec la seule composante $y_s = y_e = y$. Les courbes de dispersion relatives à des anisotropies moyennes sont représentées sur la figure 16. Elles ont une allure analogue à celle des courbes du mode I mise à part une déformation au voisinage du vecteur d'ondes marginal k_0 . C'est dans cette région en effet que le couplage entre les mouvements longitudinal et transverse des électrons devient important. Ceci se traduit par le fait que la polarisation est alors quasi longitudinale (cf. Fig. 17).

L'expression (62) du k_0 marginal pour ce cas électronique ($m = 0$, $T = 0$) est

$$\frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) A^2 + B^2 - 1 = \frac{-\epsilon \left\{ \frac{\pi}{2} \epsilon \cos^4 \theta - \left(2 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \cos^2 \theta + 1 \right\}}{(1 - \epsilon \cos^2 \theta)^2} \quad (68)$$

Les domaines angulaires d'instabilité limités par la courbe $k_0(\theta)$ sont représentés sur les figures 18(a)(b) et (c) pour les différentes anisotropies. Ces figures (ou l'équation (68)) montrent que le mode II est toujours instable dans un domaine angulaire fini autour de $\hat{n}$ (si $T_\perp > T_\parallel$) ou autour de la direction perpendiculaire à $\hat{n}$ (si $T_\perp < T_\parallel$).

Taux de croissance maximum : Le taux de croissance maximum s_m est donné par le système suivant d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{A^2(2y^2+1) + 2B^2y^2(2y^2+3)\}G^3 - \{A^2(4y^2+1) + 2B^2y^2+4y^2\}G^2 \\ - A^2(2y^2+1)G + A^2 = 0 \end{array} \right. \quad (69)$$

$$\frac{k_c^2}{\omega_o^2} = - (1 + A^2) + \frac{A^2}{2y^2} \left(\frac{1}{G} + G - 2 \right) + B^2G \quad (70)$$

On a représenté sur la figure 19 le diagramme angulaire $s_m(\theta)$ pour les trois différents types d'anisotropie : (a) faible, (b) moyenne et (c) forte. L'ordre de grandeur de s_m est $\frac{a}{c}\omega_o$ (si $T_{\perp} > T_{\parallel}$) ou $\frac{b}{c}\omega_o$ (si $T_{\perp} < T_{\parallel}$) pour des anisotropies moyennes.

Résultats analytiques relatifs aux anisotropies fortes et faibles : Dans le cas des fortes anisotropies le système d'équations (69)-(70) se résout algébriquement en prenant les quatre premiers termes du développement asymptotique (52). On obtient l'équation

$$4y^4 - 12y^2 + 39 + 5A^2 + 2B^2 = 0 \quad (71)$$

équation qui pour des fortes anisotropies ($\epsilon \rightarrow 1$ ou $\epsilon \rightarrow -\infty$) donne le résultat simple suivant

$$y^4 \approx \frac{5}{4}A^2 - \frac{1}{2}B^2 \quad (72)$$

l'expression de k_m étant donnée par

$$\frac{k_m^2}{\omega_o^2} \approx \frac{5A^2 + B^2}{2\left(\frac{5}{4}A^2 + \frac{1}{2}B^2\right)^{1/2}} \quad (73)$$

d'où la valeur de s_m

$$s_m \approx \frac{\omega_o}{\sqrt{2} c} u (5A^2 + B^2)^{1/2} \quad (74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_m \approx \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} \frac{a}{c} |\cos \theta| \quad (T_{\perp} \gg T_{\parallel}) \\ s_m \approx \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} \frac{b}{c} |\sin \theta| \quad (T_{\parallel} \gg T_{\perp}) \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_m \approx \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} \frac{a}{c} |\cos \theta| \quad (T_{\perp} \gg T_{\parallel}) \\ s_m \approx \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} \frac{b}{c} |\sin \theta| \quad (T_{\parallel} \gg T_{\perp}) \end{array} \right. \quad (76)$$

les expressions angulaires (75) et (76) n'étant valables qu'autour de $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans un domaine plus étroit que dans le cas du mode I.

Dans le cas d'une faible anisotropie ($|\epsilon| \ll 1$) le mode II électronique est purement transverse ; il est découplé du mode longitudinal. En effet si on ne garde que les termes linéaires en ϵ , le couplage introduit à travers le paramètre $A^2 \sim \epsilon^2$ est négligeable. A partir de l'équation (60) on peut mettre la relation de dispersion de ce mode purement transverse (polarisé dans le plan (k_x, k_y)) sous la forme simple suivante

$$s = \frac{ka}{\sqrt{n}} (\epsilon \cos 2\theta - \frac{k_c^2 c^2}{\omega_o^2}) \quad (77)$$

d'où les expressions de k_o , k_m et s_m

$$k_o = \frac{\omega_o}{c} (\epsilon \cos 2\theta)^{1/2} \quad (78)$$

$$k_m = \frac{k_o}{\sqrt{3}} = \frac{\omega_o}{c} (\frac{\epsilon}{3} \cos 2\theta)^{1/2} \quad (79)$$

$$s_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v_{th}}{c} \omega_o (\frac{\epsilon}{3} \cos 2\theta)^{3/2} \quad \text{où } v_{th} \sim a \sim b \quad (80)$$

3C. Le mode II couplé

Nous avons entrepris l'étude d'un plasma d'électrons et d'ions avec $T_e \gg T_i$ dans le but de trouver une déstabilisation de l'onde acoustique ionique, due au couplage entre le mode électronique instable (apériodique) à polarisation mixte et le mode longitudinal acoustique ionique.

Nous avons commencé par rechercher une solution à fréquence purement imaginaire de la relation de dispersion (60) avec $T_e \gg T_i$ (pour le calcul numérique nous avons pris $m = 1/1836$ et $T/m = 10^6$). On a représenté les courbes de dispersion sur la figure 20 en lignes continues pour différentes valeurs de l'angle θ . Les courbes ressemblent à celles du mode II électronique dans la partie à polarisation quasi-transverse, c'est-à-dire dans presque tout le domaine d'instabilité sauf dans la région proche de l'axe des $k_{\parallel}$. Là ce mode devient quasi-longitudinal et le couplage avec le mode acoustique ionique peut devenir efficace (couplage entre les branches (a) et (b)). En particulier le taux de croissance maximum est le même pour les deux modes.

Le domaine d'instabilité dans le plan $s(k)$ est limité par un k_0 marginal qui est situé sur l'axe des k ($s = 0$) pour des faibles valeurs de θ , et au dessus de l'axe ($s > 0$), nous l'appelons k_c , à partir d'une certaine valeur θ_a de l'angle de propagation (cf. fig. 20). Le k_0 marginal est donné, d'après (75), par

$$\frac{k_{oc}^2}{\omega_o^2} = B^2 - A^2 - 1 + (6,86 \cdot 10^{-3}) A^2 \quad (81)$$

Cette expression est presque la même que l'expression (63), le dernier terme étant très inférieur à A^2 . Les expressions (64) et (65) montrent donc comment k_0 tend vers zéro pour des fortes anisotropies dès que θ augmente.

Pour k supérieur à la valeur critique k_c on ne trouve plus de solution à fréquence purement imaginaire. On est donc conduit à chercher pour $k > k_c$ des solutions propagatives ($\text{Re } \omega \neq 0$) de la relation de dispersion générale (59).

En suivant le traitement habituel des ondes acoustiques ioniques, on fait un développement de Taylor de la fonction de dispersion électronique $Z'(z_e)$ ($|z_e| \ll 1$) et un développement asymptotique de la fonction ionique $Z'(z_i)$ ($|z_i| \gg 1$), soit

$$Z'(z_e) = -2i\sqrt{\pi} z_e e^{-z_e^2} - 2\{1 - 2z_e^2 + \frac{4z_e^4}{3} - \dots\} \quad (82)$$

$$Z'(z_i) \approx \frac{1}{z_i^2} \{1 + \frac{3}{2z_i^2} + \frac{15}{4z_i^4} + \dots\} \quad (83)$$

La fréquence ω de l'onde acoustique ionique étant donnée par $\omega \approx (\frac{T_e}{m_i})^{1/2} k$ il en résulte que

$$\begin{aligned} z_e &\approx \sqrt{m} \\ z_i &\approx \sqrt{T} \end{aligned} \quad (84)$$

Avec notre choix de m et T ($m \sim T^{-1} \sim 10^{-3}$) les paramètres de développement des deux séries (82) et (83) sont du même ordre de grandeur. Il en résulte qu'on peut exprimer la relation de dispersion au moyen d'une série contenant le seul paramètre $iz \equiv iz_e$. Cette relation prend la forme

$$\sum_{p=0}^n c_p (iz)^p = 0 \quad (85)$$

où les coefficients c_p sont des fonctions réelles de k . Dans l'appendice B nous résolvons l'équation (85) écrite avec $n = 3$, ce qui constitue une approximation suffisante.

Les résultats de la résolution de l'équation (85) sont représentés sur les figures 20-23 (sur la figure 20 en lignes pointillées). La figure 22 décrit l'instabilité du mode acoustique ionique dans le plan $(\text{Re } \omega, \text{Im } \omega)$. On y voit que pour les petites valeurs de θ le mode devient instable dans une gamme étroite de fréquences réelles pour des nombres d'ondes voisins de k_0 (voir sur la fig. 20 la petite courbe en cloche en trait pointillé autour de $k = k_0$, pour $\theta = 8^\circ$: le mode propagatif existe dans un domaine limité de k (k_1, k_2) autour de k_0). Sur la fig. 21 on voit comment la courbe de dispersion qui se réduit à une droite passant par l'origine pour le mode acoustique ionique ordinaire, est déformée dans le voisinage de k_0 . Quand on augmente θ le domaine de l'instabilité propagative s'étend dans le plan $(\text{Re } \omega, \text{Im } \omega)$ (cf. fig. 22). Il atteint l'axe imaginaire pour une valeur θ_a à partir de laquelle ce mode s'identifie avec le mode à fréquence purement imaginaire quasi transverse. En augmentant encore θ le domaine d'instabilité du mode propagatif commence par s'étendre, étant limité par l'axe imaginaire (cf. fig. 22) ; puis il diminue (courbes en traits pointillés sur la fig. 22) se réduisant finalement à une courbe passant par l'origine (à partir de $\theta = \theta_b$; $\theta_b \approx 40^\circ$ pour $\epsilon = 0,64$). Au delà de cette dernière valeur la courbe limitant le domaine d'instabilité s'écrase sur l'axe, et l'instabilité disparaît pour un θ limite ($\theta = \theta_f$, $\theta_f \approx 60^\circ$ pour $\epsilon = 0,64$) fonction de l'anisotropie.

Diagramme angulaire de l'instabilité : Comme on l'a vu plus haut le domaine de l'instabilité essentielle dans le plan polaire des k est limité par la courbe $k_0(\theta)$, k_0 étant le nombre d'ondes marginal défini par l'équation (81). Il existe un angle limite $\theta = \theta_a$ ($\theta_a \approx 10^\circ$ pour $\epsilon = 0,64$, cf. fig. 20) où il apparaît sur la courbe de dispersion un point à tangente verticale (en $k = k_c$). Pour $\theta > \theta_a$ la courbe $k_0(\theta)$ limitant le domaine d'instabilité doit donc être remplacée par la courbe $k_c(\theta)$. Le domaine d'instabilité propagative, lui, est situé entre les valeurs marginales $k_1(\theta)$ et $k_2(\theta)$ définies par les racines positive et négative de l'équation

$$\frac{k_c^2}{\omega_o^2} = A^2 + B^2 + 1 \quad A\{(4-\pi)A^2 + \frac{\pi}{2}B^2\}^{1/2} \quad (86)$$

$$= \frac{\epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon \cos^2 \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{2(1 - \epsilon \cos^2 \theta)^2} \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{4}\epsilon^2 \sin^2 2\theta + \frac{\pi}{2}(1 - \epsilon)\right) \right\}^{1/2}$$

Nous avons représenté sur la figure 23 le diagramme angulaire complet de l'instabilité : les courbes $k_o(\theta)$ et $k_c(\theta)$ limitent le domaine de l'instabilité essentielle et les courbes $k_1(\theta)$ et $k_2(\theta)$ celui de l'instabilité propagative. On constate que le domaine de l'instabilité propagative déborde un peu celui de l'instabilité essentielle. En particulier il est intéressant de remarquer que les deux domaines sont limités respectivement par des angles θ_b et θ_f avec $\theta_f > \theta_b$. Il en résulte qu'il existe un domaine angulaire ($\theta_b < \theta < \theta_f$) où l'instabilité propagative existe seule (bien que dans la moyenne partie du domaine d'instabilité le mode à fréquence purement imaginaire ait le plus fort taux de croissance (cf. figs. 20 et 22)). Les fréquences réelles correspondantes au taux de croissance minimum ($s \sim 0$ pour $k \sim k_o$) peuvent être déterminées en unités $\sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$ et en fonction de θ par le nombre d'onde marginal $k_2(\theta)$ de la branche propagative (éq. 86, racine positive). La courbe extérieure de la figure 23 donne donc cette fréquence réelle, fréquence qui est du même ordre de grandeur que celle correspondant à l'instabilité maximum.

P A R T I E I I

RELAXATION QUASILINEAIRE D'UNE ANISOTROPIE DE TEMPERATURE

Comme on peut s'y attendre, l'évolution d'une instabilité d'anisotropie de température sera du type quasilineaire, si le taux de croissance de cette instabilité est suffisamment faible, c'est-à-dire dans le cas d'une faible anisotropie. Nous nous placerons dans ce cas (et discuterons dans la suite de l'anisotropie maximum acceptable), où les modes instables vérifient initialement les relations de dispersion (55) et (77). L'étude de l'évolution de l'instabilité sera faite avec l'hypothèse fondamentale suivante : la fonction de distribution varie dans le temps en conservant la forme d'une Maxwelllienne à deux températures. Cette hypothèse est évidemment difficile à vérifier à posteriori (il faudrait faire l'étude des écarts non Maxwellliens qui se créent à partir de l'état initial et de leur contribution à l'évolution de l'anisotropie). Elle est cependant raisonnable si on considère que, à la différence d'une instabilité propagatrice où l'évolution de $F(\chi, t)$ est due à l'action d'un faisceau de particules ayant la vitesse de phase des modes instables, c'est ici la majorité des particules thermiques qui font évoluer la fonction de distribution (dont le contour initial ne présente pas de déformation localisée dans l'espace des vitesses).

Nous écrirons d'abord l'équation cinétique linéarisée. Nous l'approximerons dans des conditions bien définies (existence de deux échelles de temps séparées) par une équation locale dans le temps du type quasilineaire. Après avoir étudié la solution de cette équation, nous reviendrons sur les conditions de validité de la théorie, et en particulier sur l'importance des effets non linéaires.

1. EQUATIONS QUASILINEAIRES

Nous considérons un plasma statistiquement homogène. Sa fonction de distribution fine $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ satisfait à l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (86)$$

où $\mathbf{A}$ est le champ électromagnétique fluctuant

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (87)$$

Décomposant $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ en partie moyenne et partie fluctuante

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F(\mathbf{v}, t) + \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (88)$$

l'équation d'évolution de $F(\mathbf{v}, t)$ est

$$\frac{\partial F(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = - \left\langle \frac{q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \quad (89)$$

où $\langle \rangle$ est une moyenne d'ensemble (c'est-à-dire une moyenne sur les phases aléatoires des modes fluctuants). En supposant la quasilinearité des orbites des particules, $\delta N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ obéit à l'équation linéarisée :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial F(\mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (90)$$

équation que nous résolvons en négligeant la contribution du terme de conditions initiales $\delta N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0)$.

Reportant la solution de l'équation (90) dans l'équation (89), on obtient l'équation générale non markovienne

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{v}, t)}{\partial t} &= \frac{q^2}{m^2} \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \langle \Lambda_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \Lambda_\beta(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, \mathbf{v}, t - \tau) \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\beta} F(\mathbf{v}, t - \tau) \\ &= \frac{q^2}{m^2} \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} G_{\alpha\beta}(-\mathbf{v}\tau, \mathbf{v}, \tau, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\beta} F(\mathbf{v}, t - \tau) \end{aligned} \quad (91)$$

où nous avons posé, en utilisant la propriété d'homogénéité statistique

$$\langle \Lambda_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \Lambda_\beta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t - \tau) \rangle = G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \tau, t) \quad (92)$$

$G_{\alpha\beta}$ est le tenseur des corrélations spatio-temporelles du champ électromagnétique fluctuant. La portée spatiale de ces corrélations sera supposée caractérisée par la longueur L . On voit que l'intervalle de temps utile dans l'intégration de l'équation (91) est de l'ordre de $t_c = L/a$. Il en résulte que la condition de "markovianisation" de l'équation (91) est que le temps t_c soit beaucoup plus petit que le temps caractéristique de variation de $F(\mathbf{v}, t)$. Supposons pour le moment que cette condition soit satisfaite et que le temps caractéristique de $G_{\alpha\beta}$ vis à vis de τ (qui est de l'ordre de l'inverse du taux de croissance s^{-1}) soit aussi très supérieur à t_c . Nous pouvons alors considérer dans l'équation (92) un tenseur de corrélation à un seul temps et nous obtenons l'équation de diffusion suivante (pour $t \gg t_c$) :

$$\frac{\partial F(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} D_{\alpha\beta}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\beta} F(\mathbf{v}, t) \quad (93)$$

où

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{v}, t) = \frac{q^2}{m^2} \int_0^\infty d\tau G_{\alpha\beta}(-\mathbf{v}\tau, \mathbf{v}, t) \quad (94)$$

$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t)$ étant la fonction de corrélation à un temps, dont le développement en série de Fourier est défini par

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}} \quad (95)$$

Nous pouvons écrire alors le tenseur de diffusion $D_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$D_{\alpha\beta}(\underline{v}, t) = \frac{q^2}{m^2} \sum_{\underline{k}} \pi \delta(\underline{k} \cdot \underline{v}) G_{\alpha\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t) \quad (96)$$

où $G_{\alpha\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t)$ s'exprime au moyen des champs fluctuants

$$G_{\alpha\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t) = \langle A_{\alpha}(-\underline{k}, \underline{v}, t) A_{\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t) \rangle \quad (97)$$

Jusqu'à ce point le champ fluctuant n'a pas été rendu self-consistant. Ceci peut être fait en écrivant que le champ est la somme de modes linéaires à taux de croissance variables dans le temps :

$$A_{\underline{k}}(\underline{v}, t) = \sum_j A_j(\underline{k}, 0) e^{\int_0^t s_j(\underline{k}, t') dt'} \quad (98)$$

où j est l'indice caractérisant le mode et $s_j(\underline{k}, t)$ son taux de croissance linéaire donné par les expressions (55) ou (77), où s est fonction du temps. On montre facilement la conservation de l'énergie totale à partir de l'équation de diffusion (93) et de la définition des modes (98). En effet, comme nous le montrons dans l'Appendice C, l'équation de conservation de la densité d'énergie écrite pour des modes transverses quasi magnétiques s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{\underline{k}} \frac{\langle B^2(\underline{k}, t) \rangle}{2\mu_0} + W_{\text{CIN}} \right] = 0 \quad (99)$$

En remplaçant la dérivation temporelle d/dt par l'opérateur de diffusion (93), le deuxième terme s'écrit

$$\frac{dW_{\text{CIN}}}{dt} = \frac{1}{2} n m \langle \sum_{\alpha, \beta} v^2 \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} D_{\alpha\beta}(\underline{v}, t) \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} F(\underline{v}, t) \rangle \quad (100)$$

D'après (96) et (97) en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\frac{dW_{CIN}}{dt} = - \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \int d^3v \pi \delta(\vec{k} \cdot \vec{v}) \langle \vec{v} \cdot \vec{A}(-\vec{k}, \vec{v}, t) \vec{A}(\vec{k}, \vec{v}, t) \cdot \frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} \rangle \quad (101)$$

où $\partial F(\vec{v}, t) / \partial \vec{v}$ sera approximé au premier ordre en ϵ par

$$\frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = - 2 \left[\frac{\vec{v}}{a^2} + \frac{\epsilon(t)}{b^2} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{n} \right] F_{\text{isotrope}} \quad (102)$$

En utilisant les équations (98) et (101) ainsi que les relations de dispersion (55) et (77), on retrouve l'équation de conservation de l'énergie (99) (voir Appendice C).

Pour simplifier le problème nous supposerons qu'il n'y a de fluctuations initiales que sur le mode I (relation de dispersion (55)). Il est naturel de penser toutefois que dans une situation physique réelle les deux modes contribuent d'une manière comparable à l'évolution de l'anisotropie.

D'après les définitions (28) et (29), la densité d'énergie cinétique totale est

$$W_{CIN} = \frac{n}{2} (T_{\parallel} + 2T_{\perp}) \equiv \frac{3}{2} nT$$

L'intégration de l'expression (101) pour le mode I (voir Appendice C) nous fournit dT/dt en fonction du spectre du champ magnétique

$$\frac{dT}{dt} \equiv \frac{m}{3} \frac{d\langle v^2 \rangle}{dt} = \frac{2q^2}{3m} \sum_{\vec{k}} \frac{s(\vec{k}, t) \langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{k^2} \left[\frac{\sqrt{\pi} s(\vec{k}, t)}{ka} - \epsilon(t) \cos^2 \theta \right] \quad (104)$$

En procédant de façon semblable pour $dT_{||}/dt$ on obtient (Appendice C) :

$$\frac{dT_{||}}{dt} \equiv m \frac{d\langle (\tilde{n} \cdot \tilde{v})^2 \rangle}{dt} = \frac{2q^2}{m} \sum_{\tilde{k}} \frac{s(\tilde{k}, t) \langle B^2(\tilde{k}, t) \rangle}{k^2} \cos^2 \theta \times \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\epsilon(t)}{s(\tilde{k}, t)} k a \sin^2 \theta \right] \quad (105)$$

Comparant (104) et (105) on voit que $(\frac{dT}{dt})/(\frac{dT_{||}}{dt})$ est d'ordre ϵ . Le temps caractéristique d'évolution de l'énergie totale est donc beaucoup plus grand que celui de l'anisotropie. Nous écrirons donc en vertu de la relation (103) et de la définition (30) et pour $\epsilon \ll 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{||}}{dt} \approx - 2 \frac{dT_{\perp}}{dt} \\ \frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{T_{||}}{T_{\perp}} \right) \approx - \frac{3}{2T_{\perp}} \frac{dT_{||}}{dt} \end{array} \right. \quad (106)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{T_{||}}{T_{\perp}} \right) \approx - \frac{3}{2T_{\perp}} \frac{dT_{||}}{dt} \quad (107)$$

Nous pouvons maintenant montrer qu'il existe un invariant approché du mouvement. En utilisant la relation de dispersion (55) on a

$$\frac{dT_{||}}{dt} = \frac{2q^2}{m} \sum_{\tilde{k}} \frac{\langle B^2(\tilde{k}, t) \rangle}{k^2} \{y_1(k, \theta, t) + y_2(k, \theta, t)\} \quad (108)$$

où

$$y_1(k, \theta, t) = (\cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta) s(\tilde{k}, t)$$

$$y_2(k, \theta, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin^2 \theta k a \frac{k^2 c^2}{\omega_o}$$

Dans tout le domaine instable de l'espace $\tilde{k}$ (où $s(\tilde{k}, t) > 0$) on vérifie qu'on a toujours $y_1 > y_2$, et que plus la région est instable (c'est-à-dire plus l'angle θ est petit) plus forte est

cette inégalité ; en fait ce sont les angles voisins de $\theta = 0$ qui fournissent la contribution essentielle à l'expression de $\langle B^2(k, t) \rangle$, domaine angulaire où $y_1 \gg y_2$. Nous négligerons donc y_2 dans l'équation (108), ce qui nous permettra d'écrire

$$\frac{dT_{||}}{dt} = - 2 \frac{dT_{\perp}}{dt} = \frac{2q^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{s(k, t) \langle B^2(k, t) \rangle}{k^2} f(\theta) \quad (109)$$

En posant

$$I = \frac{q^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle B^2(k, t) \rangle}{k^2} f(\theta) \quad (110)$$

avec
$$f(\theta) = \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta \quad (111)$$

on a
$$\frac{d}{dt} \{T_{||} - I\} = \frac{d}{dt} \{2T_{\perp} + I\} = 0 \quad (112)$$

En supposant des très faibles fluctuations initiales et en négligeant donc la valeur initiale $I(0)$ on obtient les invariants suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\perp}(t) + \frac{I(t)}{2} = T_{\perp}^0 \\ T_{||}(t) - I(t) = T_{||}^0 \end{array} \right. \quad (113)$$

et
$$T_{\perp}(t) - T_{||}(t) + \frac{3}{2}I(t) = T_{\perp}^0 - T_{||}^0$$

Cette dernière relation montre que $I(t)$ est au plus de l'ordre de $\epsilon^0 \equiv 1 - T_{||}^0/T_{\perp}^0$. Il est donc naturel d'écrire $\epsilon(t)$ sous la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon^0 \{1 - J(t)\} \quad (114)$$

où

$$J(t) = \frac{3I(t)}{2T_0^0 \epsilon^0} - \frac{3a^2}{2mT_0^0 \epsilon^0} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{k^2} f(\theta) \quad (115)$$

et le taux de croissance (55) devient

$$s(\vec{k}, t) = \frac{ka^0}{\sqrt{\pi}} \{ \epsilon^0 (1 - J(t)) \cos^2 \theta - \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} \} \quad (116)$$

D'autre part l'équation

$$\langle B^2(\vec{k}, t) \rangle = \langle B^2(\vec{k}, 0) \rangle e^{2 \int_0^t d\tau s(\vec{k}, J(\tau))} \quad (117)$$

et l'équation (115) définissant J fournissent, en tenant compte de (111) et (116), un système d'équations couplées pour J(τ) et $\langle B^2(\vec{k}, t) \rangle$. En éliminant $\langle B^2(\vec{k}, t) \rangle$ entre ces deux équations et en passant à une représentation continue dans l'espace de Fourier, on obtient l'équation intégrale suivante pour J(τ)

$$\left. \begin{aligned} J(\tau) &= \int_0^1 dx f(x) \int_0^\infty dK g(K) e^{K\{x^2 Y(\tau) - \tau K^2\}} \\ \text{où} \quad Y(\tau) &= \tau - \int_0^\tau d\tau' J(\tau') \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

et où les variables sans dimension sont définies par

$$x = \cos \theta \quad f(x) = x^2 + \frac{\pi}{2}(1 - x^2) \quad (119)$$

$$K = \frac{k}{k_0} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon^0} \quad (120)$$

$$\tau = \frac{t}{t_0} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\sqrt{\pi} c}{2a^0 \omega_0 (\epsilon^0)^{3/2}} = \frac{1}{3\sqrt{3} s_0} \quad (121)$$

$$\text{où} \quad s_0 = s(k_m = \frac{k_0}{\sqrt{3}}, \theta = 0, t = 0) \quad (122)$$

$g(K)$ est lié au spectre des fluctuations initiales par la formule

$$g(K) = \frac{3}{2\pi^2} \frac{k_o^3 V \langle B^2(K,0) \rangle}{2\mu_o n(\epsilon_o)^2 T_o} \quad (123)$$

où V est le volume du système. Dans la suite nous supposons que le spectre des fluctuations initiales est un spectre blanc (hypothèse peu restrictive) et nous poserons $g(K) = g_o$. Dans le cas particulier de fluctuations thermiques $V \langle B^2(K,0) \rangle = 2\mu_o T$ et on a

$$g_o = \frac{3}{2\pi^2} \frac{k_o^3}{n(\epsilon_o)^2} \approx 10^{18} \sqrt{\frac{n}{\epsilon}} \quad (n \text{ en cm}^{-3}) \quad (124)$$

(on prendra cette dernière valeur dans le calcul numérique). A partir des équations (118) on obtient l'équation integro-différentielle

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}(\tau) &= 1 - J(\tau, Y) \\ Y(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

l'anisotropie étant donnée d'après (114) par

$$\epsilon(\tau) = o \cdot \dot{Y}(\tau) \quad (126)$$

Nous utiliserons dans l'équation (125) une forme asymptotique pour $J(\tau)$ valable dans la quasi totalité du processus de relaxation. En effet, l'hypothèse sur les faibles fluctuations initiales ($g_o \ll 1$) assure que $J(\tau)$ ne diffère appréciablement de zéro que pour des valeurs de τ assez élevées, où l'approximation asymptotique est valable. La forme asymptotique de l'équation (125) est (voir Appendice D) :

$$\dot{Y}(\tau) = 1 - \frac{3^{1/4} \sqrt{\pi}}{2} g_o \tau^{1/4} Y^{-7/4} \exp \left[\frac{2Y^{3/2}(\tau)}{3\sqrt{3} \tau^{1/2}} \right] \quad (127)$$

2. CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU PROCESSUS DE RELAXATION

A) Evolution de l'anisotropie

La croissance de l'instabilité étant exponentielle il en résulte que l'interaction quasilinéaire démarre brusquement. On peut définir le temps de ce démarrage $t = \tau_{in} t_0$ comme le moment où γ commence à varier appréciablement. On évalue facilement τ_{in} en étudiant la variation logarithmique des termes de l'équation (127). On a donc

$$\tau_{in} = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{Log } g_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{Log} \left[\frac{2\pi^2}{3} \frac{2\mu_0 n(\epsilon^0)^2 T_{\perp}^0}{k_0^3 V \langle B^2(k,0) \rangle} \right] \quad (128)$$

Nous voyons dans l'expression (128) que τ_{in} est grand si

$$\frac{k_0^3 V \langle B^2(k,0) \rangle}{2\mu_0} \ll n(\epsilon^0)^2 T_{\perp}^0 \quad (129)$$

Cette condition nous permet de donner une signification précise à notre hypothèse de "faibles fluctuations initiales" : nous montrerons dans la suite que $n(\epsilon^0)^2 T_{\perp}^0$ mesure la densité d'énergie du champ turbulent dans la phase principale du processus quasilinéaire. Par conséquent la condition (129) exprime que cette densité d'énergie doit être très supérieure à la densité d'énergie initiale contenue dans le domaine instable initial de l'espace des k . Dans ce cas, comme on pouvait s'y attendre, τ_{in} est sensiblement indépendant de l'amplitude des fluctuations initiales, et il est donné par

$$\tau_{in} \approx \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{Log} \left[\frac{n(\epsilon^0)^2}{k_0^3} \right] \quad (130)$$

La condition $\tau_{in} \gg 1$ signifie que :

$$nk_0^{-3} \gg (\epsilon^0)^{-2} \quad (131)$$

condition qui imposerait une limitation inférieure à l'anisotropie, mais qui est pratiquement toujours satisfaite.

Nous constatons que l'équation (127) dépend seulement du paramètre g_0 (soit $\sqrt{\frac{n}{\epsilon_0}}$). A chaque valeur de ce paramètre correspond donc une solution universelle fonction de la variable non dimensionnelle τ . On a intégré numériquement l'équation (127) et on a représenté les courbes $\frac{\epsilon(\tau)}{\epsilon_0}$ sur la figure 24 pour différentes valeurs de $\sqrt{\frac{n}{\epsilon_0}}$ prises entre 10^2 et 10^6 . Un état physique du plasma sera déterminé par les valeurs de deux autres paramètres (n et T) qu'il faudra choisir de manière que la fréquence de collision e-e soit très inférieure à la fréquence de relaxation (définie comme l'inverse de la durée de l'ensemble des deux premières phases, soit environ 25 s_0^{-1}). Comme ϵ^0 doit être très petit (nous le verrons par la suite) nous obtenons des limitations assez sévères sur les densités et les températures acceptables. Par exemple pour $\epsilon^0 = 10^{-3}$ et $n > 10 \text{ cm}^{-3}$ nous devons prendre $T > 10^5 \text{ K}$; si en plus nous fixons $T = 10^6 \text{ K}$ nous devons prendre $n < 10^5 \text{ cm}^{-3}$. En général les paramètres doivent satisfaire l'inégalité $T > 3 \times 10^2 n^{1/4} (\epsilon^0)^{-3/4}$.

Les courbes de relaxation montrent les trois phases décrites dans l'introduction. Dans la dernière l'anisotropie tend asymptotiquement vers zéro (nous ne nous inquiétons pas pour le moment de la validité de l'équation quasilineaire pour les temps très longs). En effet, on montre dans l'Appendice E que la seule solution possible des équations (118) quand $\tau \rightarrow \infty$ est $J(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, par conséquent, d'après (125), on a

$$\dot{Y}(\tau \rightarrow \infty) \equiv \frac{\epsilon(\tau \rightarrow \infty)}{\epsilon_0} \rightarrow 0 \quad (132)$$

On obtient facilement des expressions asymptotiques pour $Y(\tau)$ et $\dot{Y}(\tau)$. En posant $\dot{Y}(\tau \rightarrow \infty) = 0$ dans l'équation (127), on a

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{Y^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \frac{1}{4} \text{Log } \tau - \frac{7}{4} \text{Log } Y + \text{Log } g_0 + \text{Log } \frac{3^{1/4} \sqrt{\pi}}{2} = 0 \quad (133)$$

Introduisant la variable

$$\zeta = \frac{Y}{(3\tau)^{1/3}} \quad (134)$$

l'équation (133) prend la forme

$$\zeta^{3/2} - \frac{21}{8} \text{Log } \zeta - \frac{1}{2} \text{Log } \tau - \frac{3}{2} \text{Log } \frac{2 \times 3^{1/3}}{\sqrt{\pi} g_0} = 0 \quad (135)$$

qui se réduit quand $\text{Log } \tau \gg \text{Log } g_0^{-1} \gg 1$ à

$$\zeta(\tau \rightarrow \infty) \approx \left(\frac{1}{2} \text{Log } \tau\right)^{2/3} \quad (136)$$

ce qui donne

$$\frac{\varepsilon(\tau \rightarrow \infty)}{\varepsilon_0} \approx \left(\frac{\text{Log } \tau}{6\tau}\right)^{2/3} \quad (137)$$

B) Evolution de l'énergie du champ turbulent

Dans la même limite de temps longs pour laquelle on a obtenu l'équation (127) et en faisant un calcul similaire (voir Appendice D) nous obtenons l'expression suivante de la densité d'énergie du champ :

$$W_B(\tau) = \sum_{\vec{k}} \frac{\langle B^2(K, \tau) \rangle}{2\mu_0} = \frac{1}{9} n(\varepsilon_0) T_{\perp}^0 \frac{Y(\tau)}{\tau} \{1 - \dot{Y}(\tau)\} \quad (138)$$

$W_B/n(\varepsilon_0)^2 T_{\perp}^0$ dépend donc seulement du paramètre $\sqrt{\frac{n}{\varepsilon_0}}$. Sa variation en fonction de τ est représentée sur la Fig.25a, et sur la Fig.

25b en échelle logarithmique*. Nous voyons que les courbes présentent un maximum dont l'amplitude est indépendante de $\sqrt{\frac{n}{\epsilon^0}}$. On peut évaluer ce maximum avec l'aide de l'expression (127) de $\dot{Y}$, en posant $Y/\tau \approx 1$ (relation qui est une bonne approximation dans les deux premières phases). Ce maximum de la densité d'énergie est atteint au temps τ_m tel que

$$\dot{Y}(\tau_m) = \frac{\epsilon(\tau_m)}{\epsilon^0} \approx \frac{1}{3} \quad (139)$$

et il a d'après (138) la valeur

$$W_{Bmax} \approx \frac{2}{27} n(\epsilon^0)^2 T_0^2 \quad (140)$$

Bien que l'amplitude des modes instables continue à croître (puisque ϵ reste positif), il se produit une saturation de l'énergie de turbulence W_B . Cette saturation est due au rétrécissement du domaine instable dans l'espace des k . Quand $\tau \rightarrow \infty$, W_B tend vers zéro. En effet, les formules asymptotiques (136) et (137) donnent

$$\frac{W_B(\tau \rightarrow \infty)}{W_{Bmax}} \approx \left(\frac{\text{Log } \tau}{\tau} \right)^{2/3} \quad (141)$$

* Dans la figure 25b les points des courbes ont été calculés en utilisant la solution de l'équation asymptotique (127) pour $\tau \gtrsim \tau_{in}$ et la solution de l'équation originale (118) pour $\tau < \tau_{in}$.

3. VALIDITE DE LA THEORIE QUASILINEAIRE

L'analyse qui suit est fondée sur l'évaluation du temps de cohérence t_c du champ turbulent, et par conséquent de la portée de corrélations L . Les composantes du tenseur de corrélation $G_{\alpha\beta}(\xi, \eta, t)$ sont données par l'expression (95), dans laquelle les taux de croissance $s(k, t)$ sont obtenus à partir de la solution de l'équation quasilineaire. Etant donné l'extension limitée Δk du spectre instable, on pourrait s'attendre à ce que L soit de l'ordre de $(\Delta k)^{-1}$. Cependant l'étude détaillée de $G_{\alpha\beta}(\xi, \eta, t)$ montre (voir Appendice F) qu'il existe deux portées caractéristiques différentes $L_{||}$ et $L_{\perp}$ de $G_{\alpha\beta}$, respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe d'anisotropie $\hat{n}$: $L_{||}$ étant effectivement de l'ordre de $(\Delta k)^{-1}$, mais $L_{\perp}$ étant beaucoup plus grand. Nous avons obtenu les évaluations suivantes de $L_{||}$ et $L_{\perp}$:

$$L_{||} \approx 8 \left(\frac{Y}{\tau}\right)^{1/4} \sqrt{\tau} k_o^{-1} \quad (142)$$

$$L_{\perp} \approx 2,5 Y k_o^{-1} \quad (143)$$

expressions qui prennent la forme suivante dans la phase rapide de la relaxation :

$$L_{||}^{rap} \approx 8 \sqrt{\tau} k_o^{-1} \quad (144)$$

$$L_{\perp}^{rap} \approx 2,5 \tau k_o^{-1} \quad (\text{où } \tau \sim 10^2) \quad (145)$$

et dans la phase finale pour des temps longs

$$L_{||}^{\infty} \approx 4 \tau^{1/3} (\text{Log } \tau)^{1/6} k_o^{-1} \quad (146)$$

$$L_{\perp}^{\infty} \approx 2,5 \tau^{1/3} (\text{Log } \tau)^{2/3} k_o^{-1} \quad (147)$$

Il est naturel pour discuter de la validité de la théorie quasilineaire de prendre comme portée caractéristiques des

corrélations la plus grande des longueurs $L_{\parallel}$ et $L_{\perp}$, c'est-à-dire $L_{\perp}$. Le temps de cohérence associé est alors

$$t_c = \frac{L_{\perp}}{a} \approx 2,5 \frac{Y}{k_o a} \quad (148)$$

Existence d'échelles de temps séparées : Nous avons vu au paragraphe 1 que deux conditions étaient nécessaires pour obtenir l'équation de diffusion (93), à savoir :

$$t_c \ll \begin{cases} s^{-1} \\ t_A \end{cases}$$

t_A étant le temps de relaxation de l'anisotropie, temps qui peut être défini comme

$$t_A = \left| \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \right|^{-1} = \left| \frac{\dot{Y}(\tau)}{\ddot{Y}(\tau)} \right| \frac{1}{3\sqrt{3} s_o} \quad (149)$$

Les résultats numériques montrant que dans la phase rapide, t_A est supérieur à $2s_o^{-1}$, les deux conditions se ramènent à une seule qui s'écrit

$$\mu = \frac{t_c}{t_A} \approx \frac{t_c}{2s_o^{-1}} \approx \tau \frac{s_o}{k_o a} \approx 50 \epsilon^0 \ll 1 \quad (150)$$

Notons que cette propriété se maintient pour des temps très longs. En effet, nous avons, en utilisant les expressions asymptotiques sur le temps, dans la phase finale :

$$t_A(\infty) \approx 0,3 \tau s_o^{-1} \quad (151)$$

$$t_c(\infty) \approx 2 \tau^{1/3} (\text{Log } \tau)^{2/3} (k_o a)^{-1} \quad (152)$$

et par conséquent

$$\mu(\infty) \approx 3 \left(\frac{\text{Log } \tau}{\tau} \right)^{2/3} \varepsilon^0 \ll 1 \quad (153)$$

Effets non linéaires : Une autre condition de validité de la théorie quasilinéaire est évidemment que les orbites des particules puissent être décrites dans une approximation linéaire pendant un temps de l'ordre de t_c (cette condition n'est autre que celle requise pour pouvoir utiliser l'équation de Vlasov linéarisée). Un paramètre approprié ρ décrivant la non linéarité du mouvement sera défini comme :

$$\rho = \frac{t_c}{t_{NL}} \quad (154)$$

t_{NL} étant le temps au bout duquel une particule thermique dévie appréciablement de sa trajectoire linéaire sous l'action du champ statistique moyen. De fait on doit introduire deux paramètres ρ_B et ρ_E qui se rapportent respectivement aux effets de la force de Lorentz et de la force électrique. On prendra évidemment comme $t_{NL}^{(B)}$ la période cyclotron d'une particule dans le champ statistique moyen $\bar{B}$ ($\bar{B} \approx (2\mu_0 W_B)^{1/2}$), tandis que $t_{NL}^{(E)}$ correspondra au temps au bout duquel le champ électrique moyen $\bar{E}$ a déplacé une particule de L ($t_{NL}^{(E)} = \frac{mL}{q\bar{E}}$). Etant donné que dans notre instabilité la force de Lorentz l'emporte sur la force électrique, nous obtenons que $\rho_E \ll \rho_B$, et par conséquent que la condition de faible non linéarité se réduit à $\rho_B \ll 1$.

En effet nous avons

$$\rho_B = \frac{q\bar{B}L}{2\pi ma} \approx 10^{-1} Y \left(\frac{Y}{\tau} \right)^{1/2} (1 - Y)^{1/2} \sqrt{\varepsilon^0} \quad (155)$$

$$\rho_E = \left(\frac{q\bar{E}L}{ma} \right)^{1/2} \approx 1,5 (\varepsilon^0 \rho_B)^{1/2} \quad (156)$$

Dans la phase rapide (pour $\tau \sim \tau_{in}$) ces expressions sont approchées par

$$\rho_B^{rap} \approx 10^{-1} \tau \sqrt{\epsilon^0} \approx 10\sqrt{\epsilon^0} \quad (157)$$

$$\rho_E^{rap} \approx \frac{1}{2}(\epsilon^0)^{1/4} \rho_B \ll \rho_B \quad (\text{pour } \epsilon^0 \text{ suffisamment petit}) \quad (158)$$

La condition $\rho_B \ll 1$ devient donc

$$\epsilon^0 \ll 10^{-2} \quad (159)$$

qui est à peu près la même que la condition (150). Asymptotiquement on a

$$\rho_B \approx 10^{-1} \text{Log } \tau \sqrt{\epsilon^0}$$

ce qui montre que $\rho_B(\tau)$ atteint l'unité au bout du temps $\tau \approx e^{10(\epsilon^0)-1/2}$. La théorie quasilinéaire n'est surement plus valable pour des temps aussi longs. Il est important de remarquer que les particules qui font des mouvements non linéaires sont les particules lentes. En effet, on pourrait associer un paramètre de non linéarité $\rho(v)$ à chaque particule de vitesse v . Le temps de cohérence $t_c(v)$ vis à vis de cette particule serait $(\frac{a}{v})t_c$, temps qui devient infini quand $v \rightarrow 0$. La vitesse maximum des particules qui sont engagées dans un mouvement non linéaire dans la phase rapide est donc $10(\epsilon^0)^{1/2}a$, et le nombre relatif de ces particules est de l'ordre de $10^3(\epsilon^0)^{3/2}$, nombre très petit si $\epsilon^0 \ll 10^{-2}$.

C O N C L U S I O N

Le type d'instabilité que nous avons décrit dans ce travail a un caractère assez fondamental, du fait de sa simplicité. En effet l'anisotropie de température en est la seule cause, en l'absence de complication de la dynamique des particules due à la présence d'un champ magnétique extérieur.

Jusqu'à présent les données expérimentales étaient trop fragmentaires pour décider si cette instabilité joue un rôle dans certains plasmas astrophysiques. Des mesures récentes de la température électronique⁽²⁴⁾, cependant, semblent indiquer que les conditions requises seraient réalisées dans le vent solaire.

D'autre part l'étude de la relaxation d'une faible anisotropie de température est intéressante (indépendamment d'une application pratique éventuelle dans la description des ondes de choc non collisionnelles), au point de vue de l'analyse détaillée que nous avons pu faire des corrélations du champ turbulent et, par voie de conséquence, de la validité du modèle quasi-linéaire appliqué à une instabilité apériodique.

A P P E N D I C E A

CALCUL DU TENSEUR DIELECTRIQUE (35)

La dérivée de la fonction de dispersion du plasma $Z(z)$ définie en (20) est

$$Z'(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-t)^2} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{z-t} e^{-t^2} dt \quad (A1)$$

et satisfait l'équation différentielle

$$Z'(z) = -2\{1+zZ(z)\} \quad Z(0) = i\sqrt{\pi} \quad (A2)$$

La dérivée seconde de $Z(z)$ est

$$Z''(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(z-t)^2} e^{-t^2} dt \quad (A3)$$

D'après ces expressions on obtient l'intégrale suivante

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(z-t)^2} e^{-t^2} dt = 1 - z^2 Z'(z) - z Z''(z) = -\{1+(1-z^2)Z'(z)\} \quad (A4)$$

Il est utile de transformer les intégrales (A1) et (A4) en tenant compte de la propriété du propagateur (22)

$$\frac{1}{z-t+i\epsilon} = -i \int_0^{\infty} e^{i\tau(z-t)} d\tau \quad (A5)$$

et de sa dérivée. Ainsi on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-t)^2} e^{-t^2} dt = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau(z-t)} e^{-t^2} dt = \quad (A6)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau z} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\tau t} e^{-t^2} = - \int_0^{\infty} d\tau e^{i\tau z} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4}} = Z'(z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(z-t)^2} e^{-t^2} dt = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau z} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\tau t} t^2 e^{-t^2} = \quad (A7)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} d\tau (\tau^3 - 2\tau) e^{-i\tau z} e^{-\tau^2/4} = -\{1 + (1-z^2)Z'(z)\}$$

D'autre part la fonction de distribution $F_s(v)$ définie en (27) s'exprime à l'aide des composantes $u = v_x$, $v = v_y$ et $w = v_z$, de la façon suivante

$$F_s(v) = p_s \exp\left\{-\left(Q_s^2 u^2 - \frac{v^2}{a_s^2} + R_s^2 w^2 + 2S_s uw\right)\right\} \quad (A8)$$

où

$$p_s = \frac{1}{\pi^{3/2} a_s^2 b_s} \quad (A9)$$

$$Q_s^2 = \frac{\sin^2 \theta}{b_s^2} + \frac{\cos^2 \theta}{a_s^2} \quad (A10)$$

$$R_s^2 = \frac{\sin^2 \theta}{a_s^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b_s^2} \quad (A11)$$

$$S_s = \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{b_s^2}\right) \sin \theta \cos \theta \quad (A12)$$

satisfaisant la relation

$$R_s^2 = \frac{S_s^2}{Q_s^2} = \frac{1}{u_{\theta,s}^2} \quad (A13)$$

$$\text{où} \quad u_{\theta,s}^2 = a_s^2 \sin^2 \theta + b_s^2 \cos^2 \theta \quad (A14)$$

est le carré de la vitesse thermique effective définie par (36) (Remarquons que dans le texte on a omis l'indice θ de la variable u_θ).

Les composantes du tenseur diélectrique (35) peuvent s'écrire dans la forme suivante

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} (1 + I_{1,s}) \\ \epsilon_{yy} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} (1 + I_{2,s}) \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} I_{3,s} \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{os}^2}{\omega^2} I_{4,s}\end{aligned}\tag{A15}$$

où les intégrales I sont données d'après (24) par

$$\begin{aligned}I_{s,1} &= \int du dv dw \frac{k^3 u^2}{(\omega - kw)^2} F_s(\gamma) \\ I_{s,2} &= \int du dv dw \frac{k^2 v^2}{(\omega - kw)^2} F_s(\gamma) \\ I_{s,3} &= \int du dv dw \frac{ku \omega}{(\omega - kw)^2} F_s(\gamma) \\ I_{s,4} &= \int du dv dw \frac{k\omega(2\omega - kw)}{(\omega - kw)^2} F_s(\gamma)\end{aligned}\tag{A16}$$

A titre d'exemple, nous donnerons le calcul de l'intégrale $I_{s,1} \equiv I_1$ en tenant compte de la propriété (A5) et des relations (A6)-(A14) pour une seule espèce de particules, et nous omettrons l'indice s .

$$\begin{aligned}
 I_1 &= p \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \frac{u^2}{(\omega - kw)^2} e^{-w^2 R^2} e^{-\frac{v^2}{a^2}} e^{-(Q^2 u^2 + 2Swu)} dw dv du = \\
 &= -p k^2 \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau(\omega - kw)} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-w^2 R^2} e^{-\frac{v^2}{a^2}} e^{-(Q^2 u^2 + 2Swu)} dw dv du \\
 &= -p k^2 \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-i\tau kw} e^{-w^2 R^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\frac{v^2}{a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \\
 &\quad \times du u^2 e^{-(Q^2 u^2 + 2Swu)} \\
 &= -p k^2 \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau\omega} \left\{ \frac{a\pi}{2Q^3} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-i\tau kw} e^{-\frac{w^2}{u_\theta^2}} + \frac{a\pi S^2}{Q^5} \int_{-\infty}^{\infty} \right. \\
 &\quad \times dw e^{-i\tau kw} w^2 e^{-\frac{w^2}{u_\theta^2}} \left. \right\} \\
 &= -k^2 \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau\omega} \left\{ \frac{a^2 b^2}{2u_\theta^2} e^{-\frac{\tau^2 k^2 u_\theta^2}{4}} - \frac{a^4 b^4 S^2}{2u_\theta^2} \left(\frac{u_\theta^2}{2} \tau^2 k^2 - 1 \right) e^{-\frac{\tau^2 k^2 u_\theta^2}{4}} \right\}
 \end{aligned}$$

En faisant le changement

$$\begin{aligned}
 \tau' &= \tau k u_\theta \\
 d\tau' &= k u_\theta d\tau \\
 z &= \frac{\omega}{k u_\theta}
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\left(\frac{a^2 b^2}{2u_\theta^4} + \frac{a^4 b^4 S^2}{2u_\theta^4} \right) \int_0^{\infty} d\tau' \tau' e^{i\tau' z} e^{-\frac{\tau'^2}{4}} \\
 &\quad + \frac{a^4 b^4 S^2}{4u_\theta^4} \int_0^{\infty} d\tau' \tau'^3 e^{i\tau' z} e^{-\frac{\tau'^2}{4}}
 \end{aligned}$$

d'où finalement

$$I_1 = \frac{1}{2} B^2 Z'(z) - A^2 \{1 + (1 - z^2) Z'(z)\}$$

avec

$$A = \frac{a^2 b^2}{u_\theta^2} S \quad B = \frac{ab}{u_\theta^2}$$

D'une manière analogue, on trouve I_2 , I_3 et I_4 d'où les expressions (35).

A P P E N D I C E B

RELATION DE DISPERSION DU MODE COUPLE

Avec les définitions et les rapports suivants

$$\frac{m_e}{m_i} = m, \quad \frac{T_e}{T_i} = T, \quad z_e = z, \quad z_i = \sqrt{\frac{T}{m}} z \quad (B1)$$

$$\omega_o^2 = \omega_{oe}^2 + \omega_{oi}^2 \quad \frac{\omega_{oe}^2}{\omega_o^2} = \frac{1}{1+m} \quad \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_o^2} = \frac{m}{1+m} \quad (B2)$$

$$\phi = \frac{Z'(z_e) + m Z'(z_i)}{1 + m} \quad (B3)$$

$$\psi = \frac{Z'(z_e) + T Z'(z_i)}{1 + m} \quad (B4)$$

les composantes du tenseur diélectrique (35) qui font partie de la relation de dispersion du mode couplé (33) s'écrivent

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \overline{\epsilon_{xx}} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1 + \Lambda^2 (1 + \phi - z^2 \psi) - \frac{1}{2} B^2 \phi \right] \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \overline{\epsilon_{xz}} = A \frac{\omega_o^2}{\omega^2} (1 + \frac{1}{2} \phi - z^2 \psi) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \overline{\epsilon_{zz}} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_o^2} - z^2 \psi \right) \end{aligned} \quad (B5)$$

les paramètres Λ et B étant définis par (37) et (38). Les hypothèses $|z_e| \ll 1$ et $|z_i| \gg 1$ permettent les développements respectifs (82) et (83) de $Z'(z_e)$ et de $Z'(z_i)$.

A un ordre d'approximation suffisant on a

$$\begin{aligned} Z'(z_e) &= -2\{1 + i\sqrt{\pi} z - 2z^2 - i\sqrt{\pi} z^3\} \\ Z'(z_i) &= \frac{m}{T} \frac{1}{z^2} \end{aligned} \quad (B6)$$

En supposant les solutions de l'ordre de $|z| \sim \sqrt{m}$ on prendra les quatre termes du développement de $Z'(z_e)$ et aucun terme de $Z'(z_i)$ pour le calcul de la fonction ϕ , et les deux premiers termes de $Z'(z_e)$ et le premier terme de $Z'(z_i)$ pour le calcul de ψ , tenant compte que celle-ci va toujours multipliée par z^2 . Pour être cohérent dans le même ordre d'approximation il faut négliger le facteur m devant l'unité (ceci nous empêche de pouvoir traiter le cas de très faibles anisotropies $(B^2 - A^2 - 1) \sim \epsilon \sim m$). Les composantes barrées du tenseur (B5) prennent donc la forme

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_{xx}} &= B^2 - A^2 - 1 + \sqrt{\pi}(B^2 - 2A^2)iz \\ &\quad - 2(B^2 - 3A^2 - A_D^2)z^2 - \sqrt{\pi}(B^2 - 4A^2)iz^3 \\ \overline{\epsilon_{xz}} &= A(-\sqrt{\pi} iz + 4z^2 + 3\sqrt{\pi} iz^3) \\ \overline{\epsilon_{zz}} &= -m + 2(1 + A_D^2)z^2 + 2\sqrt{\pi} iz^3 \end{aligned} \quad (B7)$$

où on a conservé la variable

$$A_D^2 = \frac{k^2 u^2}{2\omega_o^2} = \frac{k^2}{k_D^2} \quad (B8)$$

qui satisfait $A_D^2 \ll 1$ pour des anisotropies moyennes, mais qui peut arriver à être de l'ordre de l'unité pour les fortes anisotropies et dans un certain domaine angulaire de θ . Dans ce cas l'amortissement Landau serait très efficace et imposerait une limite au domaine de k instable.

La relation de dispersion (33) dans la forme (85) pour $n = 3$ est

$$c_0 + c_1 iz + c_2 z^2 + c_3 iz^3 = 0 \quad (B9)$$

où

$$c_0 = m(\Lambda^2 + 1 + A^2 - B^2)$$

$$c_1 = m\sqrt{\pi}(2A^2 - B^2)$$

(B10)

$$c_2 = -2\{(1 + \Lambda_D^2)(\Lambda^2 + 1 + A^2 - B^2) + \frac{\pi}{2}\Lambda^2\}$$

$$c_3 = -2\sqrt{\pi}\{\Lambda^2 + 1 - A^2 - 2B^2 + \Lambda_D^2(2A^2 - B^2)\}$$

et

$$\Lambda^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2}$$

L'équation complexe (B9) fournit un système de deux équations dans les variables x et y . On peut obtenir la solution purement imaginaire ($x = 0$, $z = iy$) correspondante à la branche (a) à polarisation quasi transverse. L'équation qui satisfait est

$$c_0 - c_1 y - c_2 y^2 + c_3 y^3 = 0 \quad (B11)$$

mais elle ne sera valable que dans l'entourage de $|y| \sim \sqrt{m}$. Remarquons que dans le cas général on a obtenu la solution à partir de l'équation de dispersion exacte (60) en employant les fonctions $G(g_s)$, tabulées numériquement⁽²⁰⁾.

L'équation (B9) est satisfaite par une solution complexe $x \neq 0$, $y \neq 0$ qu'on peut calculer à partir du système d'équations réelles suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 8c_3^2 y^3 - 8c_2 c_3 y^2 - 2(c_1 c_3 - c_2^2) y + c_1 c_2 - c_0 c_3 = 0 \\ x^2 = \frac{-c_1 - 2c_2 y + 3c_3 y^2}{c_3} \end{array} \right. \quad (B12)$$

La seule solution réelle de (B12) est donnée par

$$y = \frac{1}{c_3} (s_1 + s_2 - \frac{c_2}{3}) \quad (B14)$$

$$\text{où } s_1 = \{r + (q^3 + r^2)^{1/2}\}^{1/3}$$

$$s_2 = \{r - (q^3 + r^2)^{1/2}\}^{1/3}$$

(B15)

$$q = \frac{1}{3} (c_1 c_3 - \frac{1}{3} c_2^2)$$

$$r = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} c_1 c_2 c_3 - c_0 c_3^2) - \frac{1}{27} c_2^3$$

Ces solutions complexes, calculées pour $c/b = 10^2$, $m = 1/1836$ (plasma hydrogénique) et des valeurs différentes de θ et b/a , justifient "à posteriori" les simplifications introduites dans les développements (cf. figs. 20-22). En effet : x^2 se maintient toujours de l'ordre de m , variant y entre 0 et $\sqrt{m}$ de telle sorte que $|z| \sim \sqrt{m}$. Des développements plus poussés ($n > 3$) ne modifient appréciablement les courbes de dispersion.

o o
o

A P P E N D I C E C

CONSERVATION DE L'ENERGIE, CALCUL DE $\frac{dW_{CIN}}{dt} \approx \frac{3}{2} n \frac{dT}{dt}$ et DE

$$d T_{||}/dt$$

Dans le type d'instabilité que nous considérons, les fluctuations de champ magnétique sont prépondérantes. Il est facile de voir que le terme de courant de déplacement dans les équations de Maxwell est négligeable. En effet, les champs étant supposés transverses et de la forme (94) les équations de Maxwell pour un mode j quelconque, peuvent s'écrire

$$E(-k, t) = i s_j(-k, t) \frac{k \times B(-k, t)}{k^2} \quad (C1)$$

$$ik \times B(k, t) = \mu_0 j(k, t) - i \frac{s_j^2(k, t)}{k^2 c^2} k \times B(k, t) \quad (C2)$$

le dernier terme du membre de droite de (C2) étant négligeable car $s_j^2/k^2 c^2 \ll s_j^2/k^2 a^2 \ll 1$. Multipliant ces deux équations terme à terme et tenant compte de ce que $s(-k, t) = s(k, t)$ correspond à $\partial/\partial t$, on a

$$\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2(k, t)}{\partial t} + E(-k, t) \cdot j(k, t) = 0 \quad (C3)$$

En moyennant sur l'ensemble (statistique des modes fluctuants), on obtient l'équation de conservation de la densité d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_k \frac{\langle B^2(k, t) \rangle}{2\mu_0} \right] + \sum_k E(-k, t) \cdot j(k, t) = 0 \quad (C4)$$

On vérifie facilement que le terme $\sum_k \langle E_{\tilde{\nu}-k} \cdot j_k \rangle$ s'identifie avec la variation de l'énergie cinétique $dW_{\tilde{\nu} \text{ CIN}}/dt$. En effet, en multipliant par $E_{\alpha}(-k, t)$ l'expression linéaire du courant microscopique (21) (avec $F = F(\tilde{\nu}, t)$, et $\epsilon = \epsilon(t) \ll 1$) on a :

$$E_{\alpha}(-k, t) j_{\alpha}(k, t) = - \frac{nq^2}{ms} \int d^3v \left[\frac{E_{\alpha}(-k, t) v_{\alpha} \delta_{\mu\nu} (is - k \cdot \tilde{\nu}) + E_{\alpha}(-k, t) v_{\alpha} v_{\nu} k_{\mu}}{is - k \cdot \tilde{\nu}} \right] \frac{\partial F}{\partial v_{\mu}} E_{\nu}(k, t) \quad (C5)$$

où on utilise le développement (102)

$$\frac{\partial F}{\partial v_{\mu}} = - 2 \left[\frac{v_{\mu}}{a^2} + \frac{\epsilon}{b^2} (\tilde{n} \cdot \tilde{\nu}) n_{\mu} \right] F_{\text{isot}} \quad (C6)$$

$$\text{avec} \quad F_{\text{isot}} = \frac{e^{-\frac{v^2}{a^2}}}{\pi^{3/2} a^3} \quad (C7)$$

D'autre part le propagateur de (C5) pour $s \rightarrow 0$ prend la forme

$$- \frac{1}{is - k \cdot \tilde{\nu}} \rightarrow i\pi \delta_-(k \cdot \tilde{\nu}) = PP \frac{1}{k \cdot \tilde{\nu}} + i\pi \delta(k \cdot \tilde{\nu}) \quad (C8)$$

D'après ces équations le dernier terme de (C4), en ommettant le paramètre temps, est

$$\begin{aligned} \sum_k \langle E_{\tilde{\nu}-k} \cdot j_k \rangle &= \frac{2nq^2}{m} \sum_k \int d^3v \left\langle \pi \delta(k \cdot \tilde{\nu}) \left[\frac{(E_{\tilde{\nu}-k} \cdot \tilde{\nu})(E_k \cdot \tilde{\nu})}{a^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\epsilon}{b^2} (\tilde{n} \cdot \tilde{\nu})(E_{\tilde{\nu}-k} \cdot \tilde{\nu})(E_k \cdot \tilde{n}) \right] - \frac{\epsilon}{sb^2} (\tilde{n} \cdot \tilde{\nu})(E_{\tilde{\nu}-k} \cdot \tilde{\nu}) \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{(k \cdot \tilde{n})(E_k \cdot \tilde{\nu})}{k \cdot \tilde{\nu}} - (E_k \cdot \tilde{n}) \right] \right\rangle F_{\text{isot}} \end{aligned} \quad (C9)$$

où on peut négliger le deuxième terme d'ordre ϵ par rapport et au premier d'ordre 1 et aux deux derniers qui sont d'ordre ϵ/s . La variation de la densité d'énergie cinétique doit être évaluée à l'aide de l'opérateur de diffusion (93)

$$\frac{dW_{CIN}}{dt} = \frac{1}{2}nm \frac{d\langle v^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{2}nm \left\langle \sum_{\alpha, \beta} v^2 \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} D_{\alpha\beta}(\underline{v}, t) \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} F(\underline{v}, t) \right\rangle \quad (C10)$$

D'après (96) et (97) et en effectuant une intégration par parties on a

$$\frac{dW_{CIN}}{dt} = - \frac{nq^2}{m} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\underline{k}} \int d^3v \pi \delta_{-}(\underline{k}, \underline{v}) \langle \underline{v}_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(-\underline{k}, \underline{v}, t) \Lambda_{\beta}(+\underline{k}, \underline{v}, t) \frac{\partial F(\underline{v}, t)}{\partial v_{\beta}} \rangle \quad (C11)$$

où les composantes du champ électromagnétique sont

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(-\underline{k}, \underline{v}, t) &= E_{\alpha}(-\underline{k}, t) + \{ \underline{v} \times \underline{B}(-\underline{k}, t) \}_{\alpha} = \\ &E_{\alpha, -\underline{k}} + \frac{ik}{s} (\underline{v} \cdot \underline{E}_{-\underline{k}}) - \frac{iE_{\alpha, -\underline{k}}}{s} (\underline{k} \cdot \underline{v}) \end{aligned} \quad (C12)$$

$$\begin{aligned} A_{\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t) &= E_{\beta}(\underline{k}, t) + \{ \underline{v} \times \underline{B}(\underline{k}, t) \}_{\beta} = \\ &E_{\beta, \underline{k}} - \frac{ik}{s} (\underline{v} \cdot \underline{E}_{\underline{k}}) + \frac{iE_{\beta, \underline{k}}}{s} (\underline{k} \cdot \underline{v}) \end{aligned} \quad (C13)$$

désignant tout simplement $s(\underline{k}, t) = s(-\underline{k}, t)$ par s .

D'après (C12) et d'après (C13) et (C6), on a respectivement

$$\sum_{\alpha} v_{\alpha} A_{\alpha}(-\underline{k}, \underline{v}, t) = \underline{E}_{-\underline{k}} \cdot \underline{v} \quad (C14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} A_{\beta}(\underline{k}, \underline{v}, t) \frac{\partial F}{\partial v_{\beta}} &= -2 \left\{ \frac{(\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{v})}{a^2} + \frac{\epsilon}{b^2} (\underline{n} \cdot \underline{v}) \right. \\ &\left. \left[(\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{n}) \left(1 + \frac{ik \cdot \underline{v}}{s} \right) - \frac{ik \cdot \underline{n}}{s} (\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{v}) \right] \right\} F_{isot} \end{aligned} \quad (C15)$$

Remplaçant (C14) et (C15) dans l'équation (C11) et tenant compte de la définition (C8) de $\delta_-(\underline{k} \cdot \underline{v})$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dW_{CIN}}{dt} = \frac{2nq^2}{m} \sum_{\underline{k}} \int d^3v < \pi \delta_-(\underline{k} \cdot \underline{v}) \left[\frac{(\underline{E}_{-\underline{k}} \cdot \underline{v})(\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{v})}{a^2} + \frac{\epsilon}{b^2} (\underline{n} \cdot \underline{v})(\underline{E}_{-\underline{k}} \cdot \underline{v})(\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{n}) \right] \\ - \frac{\epsilon}{sb^2} (\underline{n} \cdot \underline{v})(\underline{E}_{-\underline{k}} \cdot \underline{v}) \left[\frac{(\underline{k} \cdot \underline{n})(\underline{E}_{+\underline{k}} \cdot \underline{v})}{\underline{k} \cdot \underline{v}} - (\underline{E}_{\underline{k}} \cdot \underline{n}) \right] >_{F_{isot}} \end{aligned} \quad (C16)$$

expression qui est identifiable terme à terme avec l'équation (C9) comme nous voulions le démontrer. D'après les considérations exprimées ci-dessus on peut négliger le 2^e terme de l'intégrant de (C16). L'équation (C16) étant valable pour un mode transverse $E_{\underline{k}}(k, t)$ quelconque, on peut l'appliquer pour calculer la contribution de chaque mode en tenant compte de leur polarisation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Mode I} & E_{\underline{k}I}(k, t) \cdot \underline{n} = 0 \quad S_I(k, t) \text{ donné par (55)} \\ \text{Mode II} & E_{\underline{k}II}(k, t) \cdot \underline{n} = E(k, t) \sin \theta \quad S_{II}(k, t) \quad " \quad " \quad (77) \end{array} \right.$$

Le calcul du terme isotrope, premier terme de (C16) est le même pour les deux modes I et II. Utilisant le système de coordonnées cylindriques de la Fig.C1 on trouve

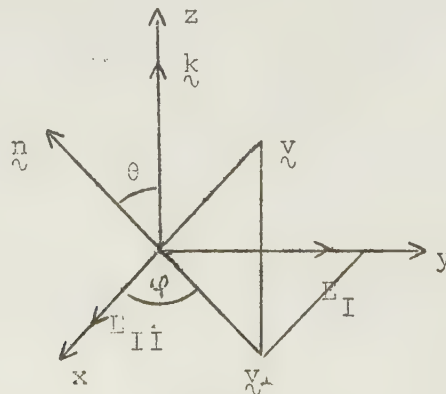


Fig.C1

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{I,II \text{ isot}} &= - \frac{2nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dv_{\perp} \frac{v}{k} \frac{<(\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{v}_{\perp})(\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{v}_{\perp})>}{a^2} F_{\text{isot}} \\
 &= \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} <E_k^2> \frac{\sqrt{\pi}}{ka} = \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{s <B_k^2>}{k^2} \frac{s\sqrt{\pi}}{ka}
 \end{aligned} \quad (C17)$$

Pour l'évaluation des termes anisotropes (les deux derniers termes en ϵ/s) on prend le système de coordonnées sphériques de la Fig.C2.

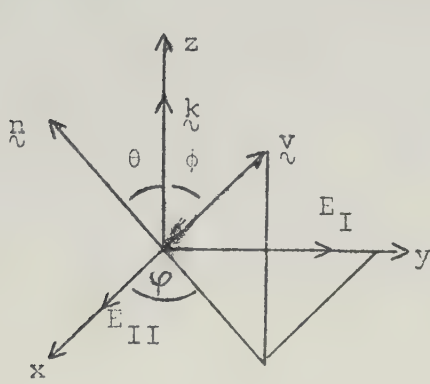


Fig. C2

$$k_{\vec{k}} \cdot \vec{n} = k \cos \theta$$

$$k_{\vec{k}} \cdot \vec{v} = k \cos \phi$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = v(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \varphi)$$

$$\vec{E}(\vec{k}, t) \cdot \vec{v} = \begin{cases} E_{k,I} v \sin \phi \sin \varphi \\ E_{k,II} v \sin \phi \cos \varphi \end{cases}$$

Seul le 3^e terme de (C16) contribue à $\left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{I,anisot}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{I,anisot} &= - \frac{2nq^2}{m} \epsilon \sum_{\vec{k}} \int d^3v \frac{(\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{v})(\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{v})}{sb^2} \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})(\vec{k} \cdot \vec{n})}{(\vec{k} \cdot \vec{v})} F_{\text{isot}} \\
 &= - \frac{2nq^2}{m} \frac{\epsilon}{b^2} \sum_{\vec{k}} \frac{<E_k^2>}{s} \cos^2 \theta \int_0^\infty dv v^4 \frac{e}{\pi^{3/2} a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^\pi d\phi \sin^3 \phi \\
 &= - \frac{nq^2}{m} \frac{\epsilon}{b^2} a^2 \sum_{\vec{k}} \frac{<E_k^2> \cos^2 \theta}{s} = - \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{s <B_k^2>}{k^2} \epsilon \cos^2 \theta
 \end{aligned} \quad (C18)$$

Les deux derniers termes de (C16) contribuent à $\left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{II,anisot}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{II,anisot} &= \frac{dW_{CIN}}{dt} I_{anisot} + \frac{2nq^2}{m} \epsilon \sum_{\vec{k}} \int d^3v \\
 &\quad \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}) \langle (\vec{E}_{-\vec{k}} \cdot \vec{v}) (\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{n}) \rangle}{s} F_{isot} \\
 &= (C18) + \frac{2nq^2}{m} \frac{\epsilon}{b^2} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle E_k^2 \rangle}{s} \sin^2 \theta \int_0^\infty dv v^4 \frac{e^{-\frac{v^2}{a^2}}}{\pi^{3/2} a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^\pi d\phi \sin^3 \phi \\
 &= (C18) + \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{s \langle B_k^2 \rangle}{k^2} \epsilon \sin^2 \theta \quad (C19)
 \end{aligned}$$

D'où les expressions complètes

$$\left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_I = \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{S_I(\vec{k}, t) \langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{k^2} \left[\frac{S_I(\vec{k}, t) \sqrt{\pi}}{ka} - \epsilon(t) \cos^2 \theta \right] \quad (C20)$$

$$\left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_{II} = \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{S_{II}(\vec{k}, t) \langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{k^2} \left[\frac{S_{II}(\vec{k}, t) \sqrt{\pi}}{ka} - \epsilon(t) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] \quad (C21)$$

et l'équation

$$\frac{d}{dt} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{2\mu_0} = \frac{nq^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{(S_I + S_{II}) \langle B^2(\vec{k}, t) \rangle}{k^2} \frac{k_c^2}{\omega_0^2} \quad (C22)$$

L'expression (104) de dT/dt n'est que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2}{3n} \left(\frac{dW_{CIN}}{dt} \right)_I \quad (C23)$$

L'évaluation de dT/dt pour le mode I, expression (105) se fait suivant un calcul similaire au précédent

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_{II}}{dt} &\equiv m \frac{d \langle (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 \rangle}{dt} = m \sum_{\alpha, \beta} \langle (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta}(\vec{v}, t) \frac{\partial}{\partial v_\beta} F(\vec{v}, t) \rangle \\
 &= - \frac{2q^2}{m} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\vec{k}} \int d^3v < \pi \delta_{\vec{k}, \vec{v}} (\vec{n} \cdot \vec{v}) n_{\alpha\alpha} A_{\alpha}(-\vec{k}, \vec{v}, t) A_{\beta}(\vec{k}, \vec{v}, t) \frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial v_\beta} \rangle \quad (C24)
 \end{aligned}$$

Tenant compte des relations suivantes valables pour le mode I

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} A_{\alpha}(-k_{\alpha}, v_{\alpha}, t) = \frac{ik_{\alpha} \cdot n_{\alpha}}{s} (E_{\alpha-k} \cdot v_{\alpha}) \quad (C25)$$

$$\sum_{\beta} A_{\beta}(k_{\beta}, v_{\beta}, t) \frac{\partial F}{\partial v_{\beta}} = - 2 \frac{(E_{k\beta} \cdot v_{\beta})}{a^2} - i \frac{\epsilon}{sb^2} (n_{\beta} \cdot v_{\beta}) (k_{\beta} \cdot n_{\beta}) (E_{k\beta} \cdot v_{\beta}) \quad (C26)$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{dT_{II}}{dt} = & \frac{4q^2}{m} \sum_{\vec{k}} \int d^3v \left\langle \pi \delta(\vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\epsilon}{s^2 b^2} (n_{\vec{k}} \cdot \vec{v})^2 (k_{\vec{k}} \cdot n_{\vec{k}})^2 (E_{\vec{k}-k} \cdot \vec{v}) (E_{\vec{k}} \cdot \vec{v}) \right. \\ & \left. + \frac{(E_{\vec{k}-k} \cdot \vec{v}) (E_{\vec{k}} \cdot \vec{v})}{sa^2} \frac{(n_{\vec{k}} \cdot \vec{v} \quad k_{\vec{k}} \cdot \vec{n})}{(k_{\vec{k}} \cdot \vec{v})} \right\rangle_{F_{isot}} \end{aligned} \quad (C27)$$

L'intégration du premier membre dans un système de coordonnées cylindriques donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_{II}}{dt} \right)_{1er} = & \frac{4nq^2}{m} \frac{\epsilon}{b^2} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle E_k^2 \rangle}{k s^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp}^5 \frac{e^{-\frac{v_{\perp}^2}{a^2}}}{\pi^{3/2} a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ = & \frac{q^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{s \langle B_k^2 \rangle}{k^2} \sqrt{\pi} \epsilon \frac{ka}{s} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (C28)$$

L'intégration du 2^e membre étant similaire à (C18) on obtient immédiatement l'expression (105),

A P P E N D I C E D

FORME ASYMPTOTIQUE DES EQUATIONS D'EVOLUTION DE L'ANISOTROPIE

$\varepsilon(t)$ ET DU CHAMP $W_B(t)$

Le système des équations (118) avec $g(K) = g_0$ et $h(\tau) = Y(\tau)/\tau$ s'écrit

$$\begin{cases} J(\tau) = g_0 \int_0^1 dx f(x) \int_0^\infty dK e^{\tau\{x^2 h(\tau)K - K^3\}} \\ h(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau d\tau' J(\tau') = \frac{Y(\tau)}{\tau} \end{cases} \quad (D1)$$

Introduisant le changement de variables

$$y = (3\tau)^{1/3} K \quad (D3)$$

$$z = x^2 \frac{Y(\tau)}{(3\tau)^{1/3}} = \frac{x^2}{3^{1/3}} \tau^{2/3} h(\tau) \quad (D4)$$

l'équation (D1) devient

$$J(\tau) = \frac{g_0}{(3\tau)^{1/3}} \int_0^1 dx f(x) \int_0^\infty dy e^{z(y - \frac{y^3}{3z})} \quad (D5)$$

L'intégrale sur y peut être représentée par la fonction de Lommel $S_{0,1/3}(\xi)$ où $\xi = \frac{2}{3} z^{3/2}$ (23), mais nous allons évaluer une forme asymptotique de celle-ci. On montrera à posteriori que la limite $z \rightarrow \infty$ coïncide avec la limite $\tau \rightarrow \infty$. En effet, la solution $Y(\tau)$ de l'équation (118) satisfait $Y(\tau)/(3\tau)^{1/3} \rightarrow \infty$ et on voit facilement que la contribution des petites valeurs de x dans l'intégration (D5) est négligeable. Pour z grand les valeurs

significatives de y qui contribuent à l'intégrale se trouvent autour de $y = \sqrt{z}$ et on a

$$\int_0^\infty dy e^{z(y-\frac{y^3}{3z})} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{z^{1/4}} \int_{-\infty}^\infty dy e^{-\frac{(y-\sqrt{z})^2}{z^{-1/2}}} \quad (D6)$$

L'intégrant du membre droit est une Gaussienne d'écart type $z^{-1/4}$ dont la forme asymptotique est $\delta(y - \sqrt{z})$. On obtient ainsi pour $J(\tau)$

$$J(\tau) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{3^{1/3}} g_0 \tau^{-1/3} \zeta^{-1/4} \int_0^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{x}} e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2}x^3} \quad (D7)$$

où
$$\zeta = \frac{z}{x^2}$$

L'intégration sur x se fait aussi dans la limite $\zeta \rightarrow \infty$ (voir Appendice E) et on obtient finalement

$$J(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 3^{1/3}} g_0 \tau^{-1/3} \zeta^{-7/4} e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2}} \quad (D9)$$

d'où après changement de variables, l'expression (127).

Limite de $J(\tau)$ pour $\tau \rightarrow \infty$: Pour montrer que $J(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$, on peut raisonner par l'absurde, en établissant que toutes les valeurs asymptotiques de $J(\tau)$ autres que l'unité sont incompatibles avec les équations. En se donnant à priori la forme asymptotique J_1 , et en portant celle-ci dans les équations, on peut recalculer une expression J_2 qui devra coïncider avec J_1 . Le schéma est le suivant :

- 1) On pose à priori $J(\tau \rightarrow \infty) = J_1$
- 2) D'après (D2) on en déduit $h(\tau)$ et z d'après (D4)

3) Si $z \gg 1$ on obtient la solution asymptotique J_2 en vertu de (D9). Si $z \lesssim 1$ la solution exacte de (D1) fournit J_2 .

Le tableau suivant présente les différents cas possibles et montre que seul $J(\infty) = 1$ est acceptable.

cas	J_1	$h(\tau)$	z	d'après	J_2	compatible
a	0	1	$\sim \tau^{2/3} \rightarrow \infty$	(D4)	$+\infty$	non
b	$+\infty$	$-\infty$	$\rightarrow 0$	(D1)	0	non
c	$-\infty$	$+\infty$	$\geq \tau^{2/3} \rightarrow \infty$	(D4)	$+\infty$	non
d	const.	const.	$\sim \tau^{2/3} \rightarrow \infty$	(D4)	$+\infty$	non
e_1	1	$> \tau^{-2/3} \rightarrow 0$	$z(\tau) \rightarrow \infty$?	(D4)	$+\infty$	non
					const.	non
					1	oui
e_2	1	$< \tau^{-2/3} \rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	(D1)	0	non
e_3	1	$\sim \tau^{-2/3} \rightarrow 0$	const.	(D1) ou (D4)	0	non

On vérifie (voir le texte éqs.(133)-(137)) qu'il existe effectivement une solution $J(\tau)$ tendant asymptotiquement vers 1.

L'expression asymptotique de l'évolution de la densité d'énergie se calcule de façon similaire. On a :

$$\begin{aligned}
 W_B(\tau) &= \int_{\tilde{k}} \frac{\langle B^2_{K,\tau} \rangle}{2\mu_0} = \frac{1}{3} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 g_0 \int_0^1 dx \int_0^\infty dK K^2 e^{K(Yx^2 - K^2\tau)} \\
 &= \frac{1}{3} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 g_0 \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{y^2}{3\tau} e^{z(y - \frac{y^3}{3z})} \\
 &= \frac{1}{9} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 \frac{g_0}{\tau} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^\infty dy y^2 e^{\frac{2}{3} z^{3/2} \frac{\sqrt{\pi} \delta(y - \sqrt{z})}{z^{1/4}}} \\
 &= \frac{1}{9} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 \frac{\sqrt{\pi} g_0}{\tau} \int_0^1 dx z^{3/4} e^{\frac{2}{3} z^{3/2}} \quad (D11)
 \end{aligned}$$

après le changement $\zeta = \frac{z}{x^2}$ l'intégrale sur x (voir Appendice E) donne

$$\int_0^1 dx x^{3/2} e^{\frac{2}{3} x^3 \zeta^{3/2}} = \frac{e^{\frac{2}{3} \zeta^{3/2}}}{2 \zeta^{3/2}} \quad (D12)$$

et on a

$$\begin{aligned}
 W_B(\tau) &= \frac{1}{9} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 \frac{\sqrt{\pi} g_0}{2\tau} \zeta^{-3/4} e^{\frac{2}{3} \zeta^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{9} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 \frac{Y}{\tau} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2.3^{1/3}} g_0 \tau^{-1/3} \zeta^{-7/4} e^{\frac{2}{3} \zeta^{3/2}} \right) \\
 &= \frac{1}{9} n(\varepsilon^0)^2 T_1^0 \frac{Y}{\tau} J(\tau) \quad (D13)
 \end{aligned}$$

d'où l'expression (138).

A P P E N D I C E E

$$\text{EVALUATION DE } A = \int_0^1 dy y^m e^{\alpha y^p} \text{ pour } \alpha \rightarrow \infty$$

L'intégration sur x dans les équations (D7) et (D12) en changeant la variable x par $y = \sqrt{x}$, est de la forme

$$A = \int_0^1 dy y^m e^{\alpha y^p} \quad (E1)$$

où m et p sont des nombres entiers et $\alpha = \frac{2}{3} \zeta^{3/2} \rightarrow \infty$ dans la limite asymptotique. Après le changement de variable $y = 1 - t$ on a

$$A = \int_0^1 dt (1-t)^m e^{\alpha(1-t)^p} = e^{\alpha} \int_0^1 dt (1-t)^m e^{-\alpha P(t)} \quad (E2)$$

où

$$P(t) = 1 - (1-t)^p \quad (E3)$$

est un polynôme monotone croissant pour $0 < t < 1$. Dans la limite $\alpha \rightarrow \infty$ nous pouvons choisir un nombre n tel que

$$n \gg 1, \quad \frac{n}{\alpha} \ll 1 \quad (E4)$$

divisant l'intervalle d'intégration en deux parties :

$(0, \frac{n}{\alpha})$ et $(\frac{n}{\alpha}, 1)$. Dans $(\frac{n}{\alpha}, 1)$ on a $e^{-\alpha P(t)} < e^{-\alpha P(\frac{n}{\alpha})}$ et en supposant $\frac{n^2}{\alpha} \ll 1$, on vérifie que :

$$\alpha P(\frac{n}{\alpha}) > pn - \frac{p(p-1)}{2} \frac{n^2}{\alpha} \quad (E5)$$

d'où

$$\int_{\frac{n}{\alpha}}^1 dt < \frac{(1-\frac{n}{\alpha})^{m+1}}{m+1} e^{-pn + \frac{p(p-1)}{2} \frac{n^2}{\alpha}} < e^{-pn + \frac{p(p-1)}{2} \frac{n^2}{\alpha}} \quad (E6)$$

D'autre part, dans le domaine $(0, \frac{n}{\alpha})$, $e^{-\alpha P(t)} \rightarrow e^{-\alpha p t}$.
En effet, pourvu que $\frac{n^2}{\alpha} \ll 1$, on a

$$e^{-\alpha p t} < e^{-\alpha P(t)} < e^{-\alpha p t} e^{\alpha \frac{p(p-1)}{2} t^2} \quad (E7)$$

... $\{e^{-\alpha P(t)} - e^{-\alpha p t}\}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut en prenant α suffisamment grand. Par conséquent l'intégrale

$\int_0^{\frac{n}{\alpha}}$ tend vers la limite $\frac{e^{\alpha}}{p\alpha}$. Finalement nous voulons montrer que

$\int_0^{\frac{n}{\alpha}} \ll \int_0^{\frac{n}{\alpha}}$. Ceci revient à prouver que

$$e^{\frac{p(p-1)}{2} \frac{n^2}{\alpha}} e^{-pn} \ll \frac{1}{p\alpha} \quad (E8)$$

L'inégalité (E8) peut être satisfaite si on choisit, par exemple, n dans l'intervalle $\alpha^{1/4} \ll n \ll \alpha^{1/2}$. En effet

$$e^{\frac{p(p-1)}{2} \frac{n^2}{\alpha}} e^{-pn} < e^{\frac{p(p-1)}{2}} e^{-p^{1/4} (p\alpha)^{1/4}} \quad (E9)$$

d'où suit évidemment l'inégalité (E8). L'intégrale (E1) vaut donc :

$$A = \frac{e^{\alpha}}{p\alpha} \quad (E10)$$

A P P E N D I C E F

EVALUATION DE LA PORTEE DES CORRELATIONS

En utilisant les équations (95), (97) et (98) $\langle G_{\alpha\beta}(\underline{r}, t) \rangle$ s'écrit sous la forme

$$\langle G_{\alpha\beta}(\underline{r}, t) \rangle = \sum_{\underline{k}} \langle G_{\alpha\beta}(\underline{k}_0, 0) \rangle e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} e^{2 \int_0^t d\tau s\{\underline{k} \cdot \underline{J}(\tau)\}}$$

D'après l'équation (116) et en passant à une représentation continue dans l'espace de Fourier, on obtient en fonction des variables réduites (120) et (121)

$$\langle G_{\alpha\beta}(\underline{r}, t) \rangle = \frac{k_0^3 V}{8\pi^3} \langle G_{\alpha\beta}(\underline{k}_0, 0) \rangle \int d^3 \underline{k} e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} e^{K\{\cos^2 \theta Y(\tau) - K^2 \tau\}} \quad (F2)$$

(en supposant que les fluctuations initiales ont un spectre blanc)

Nous allons développer l'expression (F2) dans le repère de la Fig. F1 et en employant les variables y et z définies dans l'Appendice D (formules (D3) et (D4)). On obtient ainsi :

$$\langle G_{\alpha\beta}(\underline{r}, t) \rangle = \frac{k_0^3}{8\pi^3} V \langle G_{\alpha\beta}(\underline{k}_0, 0) \rangle F(\underline{k}_0 r, \phi, \tau) \quad (F3)$$

où

$$F(\underline{k}_0 r, \phi, \tau) = \frac{1}{3\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \frac{1}{z^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \left[\frac{e^{-\frac{(y-\sqrt{z})^2}{z^{1/2}}}}{z^{-1/4}} \right] e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (F4)$$

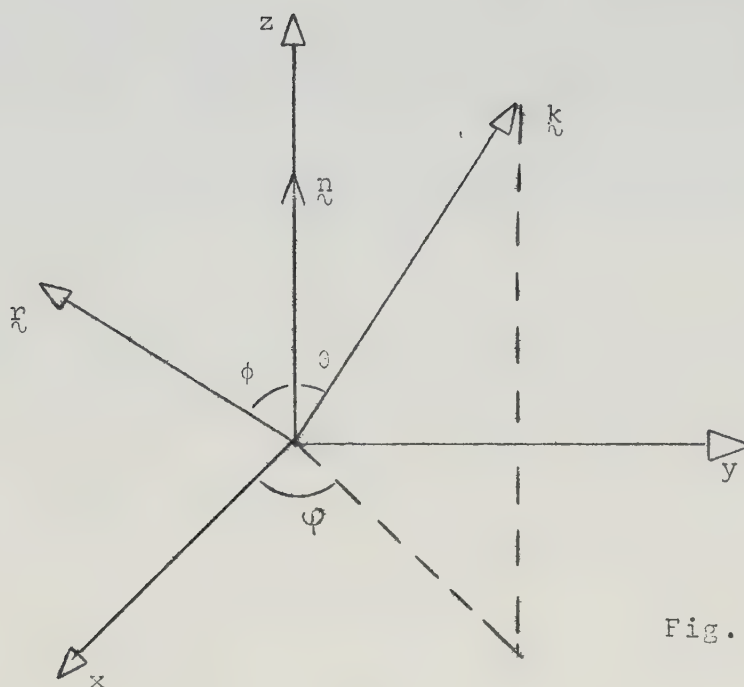


Fig. F1

Nous allons considérer deux cas :

$$1) \phi = 0 \text{ où } k \cdot r_{\parallel} = k_0 r \frac{y}{(3\tau)^{1/3}} \cos \theta$$

$$2) \phi = \frac{\pi}{2} \text{ où } k \cdot r_{\perp} = k_0 r \frac{y}{(3\tau)^{1/3}} \sin \theta \cos \phi$$

La valeur de l'intégrale de l'expression (F4) tend vers zéro quand $e^{ik \cdot r}$ oscille dans un intervalle Δy de l'ordre de $z^{-1/4}$ (qui est l'écart type de la fonction Gaussienne de l'intégrant). Il sera donc naturel de définir $L_{\parallel}$ et $L_{\perp}$ comme les valeurs que doit atteindre r (respectivement pour les composantes de G parallèle et perpendiculaire) pour que l'argument de l'exponentielle imaginaire atteigne la période 2π .

1) Dans le cas $\phi = 0$, $L_{\parallel}$ est donné approximativement par

$$k_0 L_{\parallel} \frac{z^{-1/4}}{(3\tau)^{1/3}} \cos \theta \approx 2\pi \quad (F5)$$

Etant donné que la contribution prédominante à l'intégrale est fournie par les petites valeurs de θ , nous aurons une bonne estimation de $L_{||}$ en posant $\theta = 0$ dans l'équation (F5), ce qui fournit l'expression (142) du texte. On aura une estimation de $F_{||} = F(k_0, r_{||} < L_{||}, \phi = 0, \tau)$ en remplaçant $e^{i k \cdot r_{||}}$ par l'unité et $z^{1/4} e^{-\frac{(y-\sqrt{z})^2}{z^{1/2}}}$ pour sa forme asymptotique $\delta(y - \sqrt{z})$. L'intégration sur φ et y donne :

$$F_{||} = \frac{2\pi\zeta^{3/4}}{3\tau} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^{3/2}\theta e^{\frac{2}{3}\zeta^{2/3} \cos^3\theta} \quad (F6)$$

En changeant θ en $t = 1 - \sqrt{\cos\theta}$, (F6) se réduit à une intégrale du type (E2), qui donne

$$F_{||} = \frac{\pi}{3\tau} \zeta^{-3/4} e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2}} \quad (F7)$$

2) Dans le cas $\phi = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons après intégration sur φ

$$F_{\perp} = \frac{\pi}{3\tau} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}}{z^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \left[\frac{e^{-\frac{(y-\sqrt{z})^2}{z^{1/2}}}}{z^{-1/4}} \right] J_0(\lambda) \quad (F8)$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro, et

$$\lambda = k_0 r_{\perp} \frac{y}{(3\tau)^{1/3}} \sin\theta \quad (F9)$$

$J_0(\lambda)$ commence à osciller quand λ atteint la pseudopériode initiale λ_0 (nous prendrons $\lambda_0 \approx 2\pi$). Par conséquent, l'intégrant de l'intégrale (F8) commence à décroître quand $k_0 r_{\perp} \sin\theta$ atteint la valeur définie par

$$\frac{z^{-1/4}}{(3\tau)^{1/3}} k_0 r_{\perp} \sin \theta \approx \lambda_0 \approx 2\pi \quad (F10)$$

C'est la présence de $\sin \theta$ dans l'expression (F10) qui rend plus longue la portée des corrélations dans la direction perpendiculaire à $\vec{n}$. Nous pouvons considérer, pour $r_{\perp}$ fixe, que la relation (F10) définit la limite supérieure $\theta_{\max}$ de l'intervalle utile d'intégration de (F8). Deux cas sont à considérer :

1) Si $\sin \theta_{\max} \sim 1$ (ce qui fournit évidemment des valeurs de $r_{\perp}$ du même ordre de grandeur que le $L_{\parallel}$ trouvé ici dessus), l'intégrale sur θ s'étend sur un intervalle fini et l'ordre de grandeur de $F_{\perp}$ est le même.

2) Si $\sin \theta_{\max} \ll 1$, en remplaçant $J_0(\lambda)$ par l'unité, on a

$$F_{\perp} \approx \frac{\pi}{3\tau} \zeta^{3/4} \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin \theta \cos^{3/2} \theta e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2} \cos^3 \theta} \quad (F11)$$

$$= \frac{2\pi}{3\tau} \zeta^{3/4} \int_0^{\frac{\eta^2}{4}} dt (1-t)^4 e^{\alpha(1-t)^6} \quad (F12)$$

où $\alpha = \frac{2}{3}\zeta^{3/2}$

et $\eta = \sin \theta_{\max} = 8,3(\tau Y)^{1/4} (k_0 r_{\perp})^{-1} \quad (F13)$

Cette dernière intégrale est du type (E2) avec une limite supérieure $\frac{\eta^2}{4} \ll 1$. Nous devons donc considérer les deux cas suivants:

2a) $\alpha^{-1/2} \ll \frac{\eta}{2} \ll 1$

En généralisant l'argument de l'Appendice E nous pouvons trouver un nombre n tel que $1 \ll n \ll \alpha \eta^2$, partageant le domaine

d'intégration en deux intervalles $\left[(0, \frac{n}{\alpha}) \text{ et } (\frac{n}{\alpha}, \frac{n^2}{4}) \right]$, le dernier étant négligeable. Le résultat de l'intégration est donc indépendant de la limite supérieure $\frac{n^2}{4}$, et donne

$$F_{\perp} = \frac{n}{6\tau} \zeta^{-3/4} e^{\frac{2}{3}\zeta^{3/2}} \quad (F14)$$

qui est du même ordre de grandeur que $F_{\parallel}$ (éq.(F7)).

$$2b) \frac{n}{2} \ll \alpha^{-1/2} \quad \text{ou} \quad k_0 r \gg 2,5Y$$

Dans ce cas l'intégrand dépend de la borne supérieure de l'intégrale. Cependant, dans ce cas, un développement de $e^{\alpha(1-t)^6}$ en série de Taylor, est valable, ce qui fournit à l'ordre le plus bas le résultat suivant pour $F_{\perp}$:

$$F_{\perp} \approx \frac{2}{4} \frac{e^{\alpha}}{\alpha} \left(\frac{2\pi}{3\tau} \zeta^{3/4} \right) \approx \frac{3}{4} \alpha n^2 F_{\parallel} \ll F_{\parallel} \quad (F15)$$

De la discussion précédente nous concluons que $n \approx 2\alpha^{-1/2}$ (ou $r_{\perp} \approx 2,5Y k_0^{-1}$) donne l'ordre de grandeur de la portée des corrélations perpendiculaires à $\vec{k}$ (cf.éq.(143) du texte).

R E F E R E N C E S

- (1) A.J.HUNDHAUSEN, S.J.BAME and N.F.NESS, J.Geophys. Res., 72, 5265 (1967)
- (2) S.S.MOISEEV and R.Z.SAGDEEV, Plasma Phys. (J.Nucl. Energy, Part. C), 5, 43, (1963)
- (3) E.S.WEIBEL, Phys.Rev.Letters, 2, 83, (1959)
- (4) B.D.FRIED, Phys.Fluids, 2, 337, (1959)
- (5) A.E.STEFANOVICH, Sov.Phys.Tech.Phys., 7, 462, (1962)
- (6) D.BUNEMANN, Ann.Phys., 25, 340, (1963)
- (7) F.D.KAHN, J.Fluid Mech., 14, 321, (1962)
- (8) F.D.KAHN, J.Fluid Mech., 19, 210, (1964)
- (9) H.MOMOTA, Prog.Theor.Phys., 35, 380, (1966)
- (10) C.S.WU, Phys.Fluids, 9, 1852, (1966)
- (11) A.TAKEO, J.Phys.Soc.Japan, 23, 1415, (1967)
- (12) A.SMITH, J.Plasma Phys., 3 (2), 281, (1969)
- (13) G.KALMAN, C.MONTES and D.QUEMADA, Phys.Fluids, 11, 1797, (1968)
- (14) V.D.SHAPIRO and V.I.SCHEVCHENKO, Sov.Phys. JETP, 18, 1109, (1964)
- (15) R.C.DAVIDSON and H.J.VOLK, Phys.Fluids, 11, 2259, (1968)
- (16) R.Z.SAGDEEV and A.A.GALEEV, International Centre for Theoretical Physics Report IC/66/64 Trieste (1966)
- (17) C.F.KENNEL and R.Z.SAGDEEV, J.Geophys.Res., 72, 3303 (1967)
- (18) A.SMITH, J.Plasma Phys., 3 (2), 295, (1969)
- (19) C.MONTES, J.COSTE and G.DIENER, J.Plasma Phys. (sous presse, 1970)

- (20) B.D.FRIED and S.D.CONTE, The Plasma Dispersion Function
Academic Press, New-York, (1961)
- (21) B.D.FRIED and R.W.GOULD, Phys.Fluids, 4, 139, (1961)
- (22) R.BALESCU, Statistical Mechanics of charged particles (Inter-
science Published) App. 2 (1963)
- (23) Cfr. par ex. Y.L.LUKE "Integral of Bessel Functions"
p.74-79, Mc Graw Hill, New-York (1962).
- (24) M.D.MONTGOMERY, S.J.BAME and A.J.HUNDHAUSEN, J.Geophys.Res.,
73, 4999, (1968).

o o
o

LEGENDE DES FIGURES

Fig.10 : Représentation de la fonction $G(y) \equiv -\frac{1}{2}Z'(iy) = 1 - \sqrt{\pi} y \exp(y^2)(1 - \operatorname{erf} y)$

Fig.11 : Mode I : courbes de dispersion (taux de croissance en fonction de k) pour différentes valeurs du paramètre $\frac{u}{a}$. La courbe en pointillé représente le lieu des taux de croissance maximum.

Fig.12 : (a) Mode I : diagramme angulaire du domaine d'instabilité (k_0 marginal en fonction de θ) pour une anisotropie faible ($0 < \varepsilon \ll 1$).

(b) Id. pour une anisotropie moyenne ($\varepsilon = 1/2$)

(c) Id. pour une forte anisotropie ($\varepsilon \rightarrow 1$).

Fig.13 : (a) Mode I : diagramme angulaire du taux de croissance maximum (s_m en fonction de θ) pour une anisotropie faible ($0 < \varepsilon \ll 1$)

(b) Id. pour une anisotropie moyenne ($\varepsilon = 1/2$)

(c) Id. pour une forte anisotropie ($\varepsilon \rightarrow 1$).

Fig.16 : Mode II, électronique : courbes de dispersion (taux de croissance en fonction de k) pour différentes valeurs de l'angle θ et pour une anisotropie $\varepsilon = 0.64$ ($T_{||}/T_{\perp} = 36/100$)*

* Les mêmes courbes sont valables pour une anisotropie inverse ($T_{||}/T_{\perp} = 100/36$) en changeant θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Fig.17 : Mode II, électronique : polarisation $P = |E_{||}|/|E_{\perp}|$ en fonction de k .

Fig.18 : (a) Mode II, électronique : diagrammes angulaires du domaine d'instabilité (k_0 marginal en fonction de θ) pour des anisotropies faibles ($0 < \epsilon \ll 1$ pour $T_{\perp} > T_{||}$ et $0 > \epsilon \gg -1$ pour $T_{\perp} < T_{||}$).

(b) Id. pour des anisotropies moyennes ($\epsilon = 1/2$ pour $T_{\perp} > T_{||}$ et $\epsilon = -1$ pour $T_{\perp} < T_{||}$).

(c) Id. pour des fortes anisotropies ($\epsilon \rightarrow 1$ pour $T_{\perp} \gg T_{||}$ et $\epsilon \rightarrow -\infty$ pour $T_{\perp} \ll T_{||}$).

Fig.19 : (a) Mode II électronique : diagramme angulaire du taux de croissance maximum (s_m en fonction de θ) pour une faible anisotropie ($0 < \epsilon \ll 1$).

(b) Id. pour une anisotropie moyenne ($\epsilon = 1/2$)

(c) Id. pour une forte anisotropie ($\epsilon \rightarrow 1$).

Les mêmes figures sont valables respectivement pour des anisotropies inverses (les mêmes que celles de la Fig. 18) à condition de tourner l'axe d'anisotropie $\hat{n}$ d'un angle $\pi/2$ et changer la vitesse a par la vitesse b .

Fig.20 : Mode II couplé : courbes de dispersion (taux de croissance en fonction de k) pour différentes valeurs de l'angle θ . Les courbes continues correspondent à l'instabilité essentielle (non propagative, $\text{Re } \omega = 0$) à polarisation quasi transverse, tandis que les courbes en pointillé correspondent à la branche propagative acoustique ionique (paramètres : $\epsilon = 0,64$, $c/b = 100$, $m_i/m_e = 1836$, $T_{e m_i}/T_{i m_e} = 10^6$).

Fig.21 : Mode II couplé : courbes de dispersion ($\text{Re } \omega$ en fonction de k) correspondant à la branche propagative acoustique ionique, pour différentes valeurs de l'angle θ . La courbe de dispersion de l'onde acoustique ionique ordinaire correspond à la droite $\omega = (T_e/m_i)^{1/2} k$ passant par l'origine (mêmes paramètres que ceux de la Fig.20).

Fig.22 : Mode II couplé : lieu de la solution de la relation de dispersion dans le plan complexe ω . Il faut remarquer la différente forme entre $\theta = 8^\circ$ et $\theta = 12^\circ$. (Paramètres de la Fig.20).

Fig.23 : Mode II couplé : diagramme angulaire de l'instabilité. Les courbes $k_1(\theta)$ et $k_2(\theta)$ délimitent le domaine d'instabilité propagative (branche acoustique ionique) à polarisation quasi longitudinale. La branche d'instabilité essentielle est limitée par la courbe $k_0(\theta)$ entre 0° et 10° , et par $k_c(\theta)$ à partir de 10° . Les angles limites θ_a , θ_b et θ_f sont mentionnés dans le texte.

Fig.24 : Courbes de relaxation de l'anisotropie ($\dot{Y} \equiv \epsilon/\epsilon^0$ en fonction de $\tau/3\sqrt{3} \equiv s_0 t$) pour différentes valeurs du paramètre $\sqrt{\pi}/\epsilon^0$.

Fig.25 : (a) Evolution de la densité d'énergie du champ turbulent (échelle naturelle).

(b) Id. (échelle logarithmique).

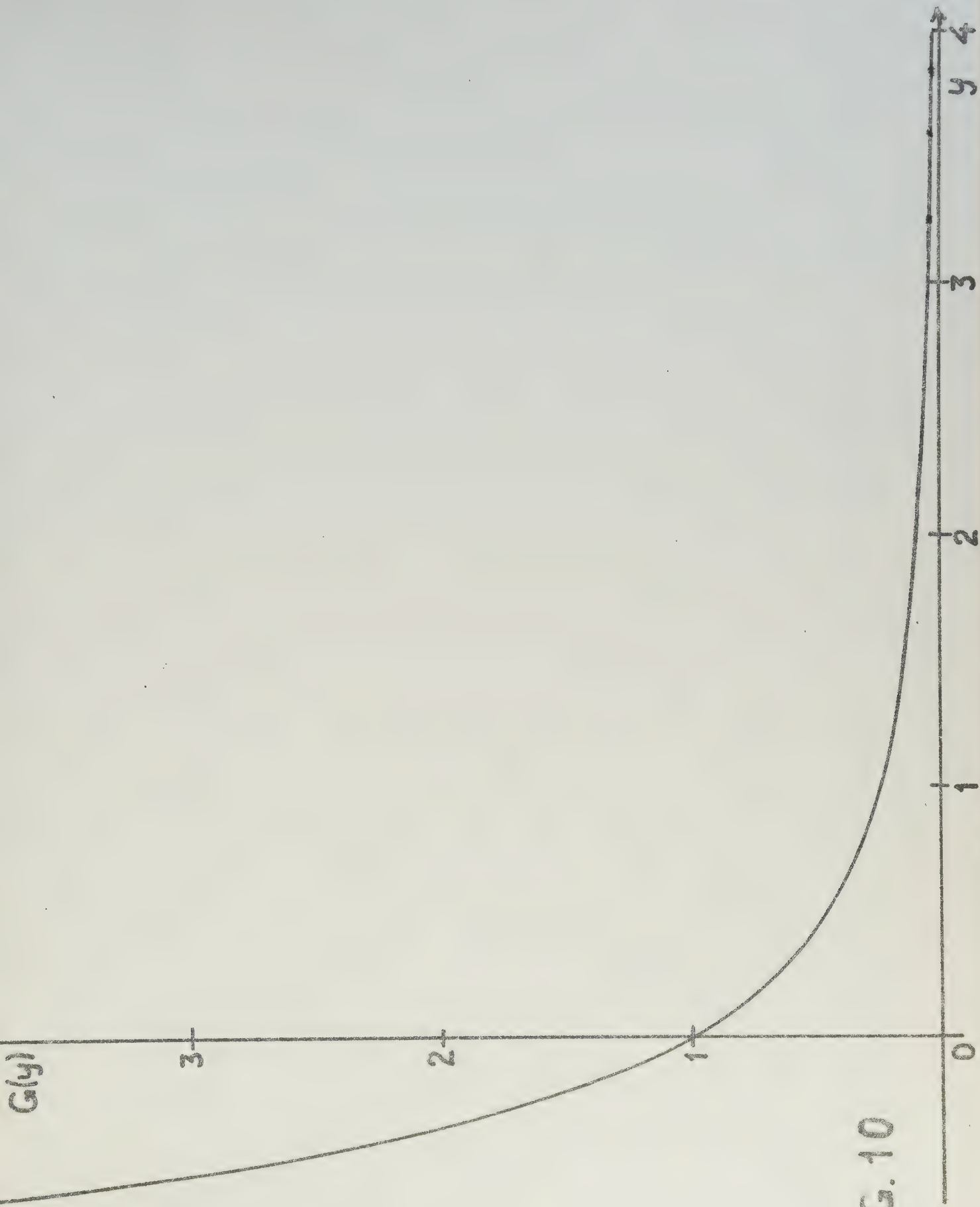


FIG. 10

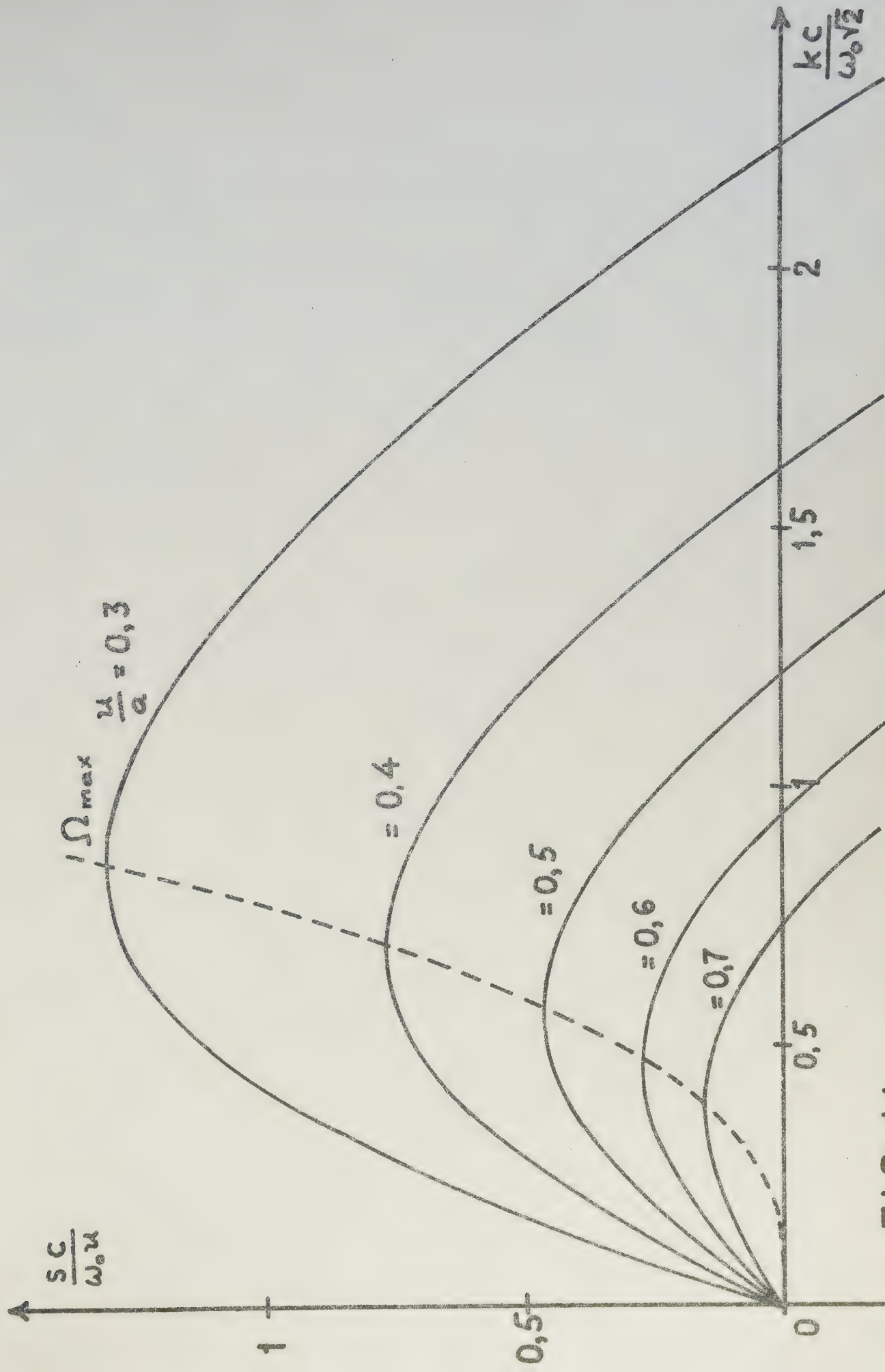


FIG. 11

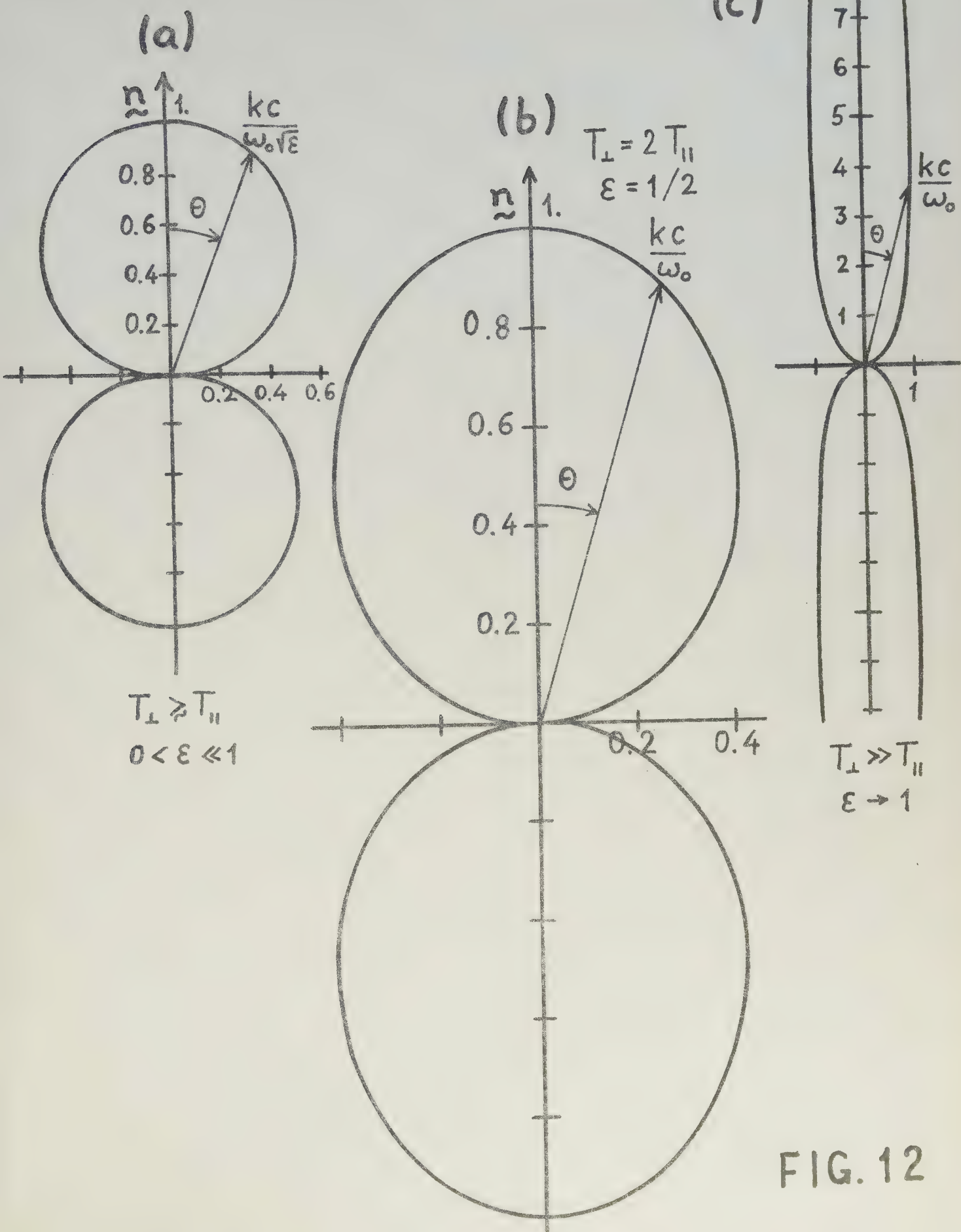


FIG. 12

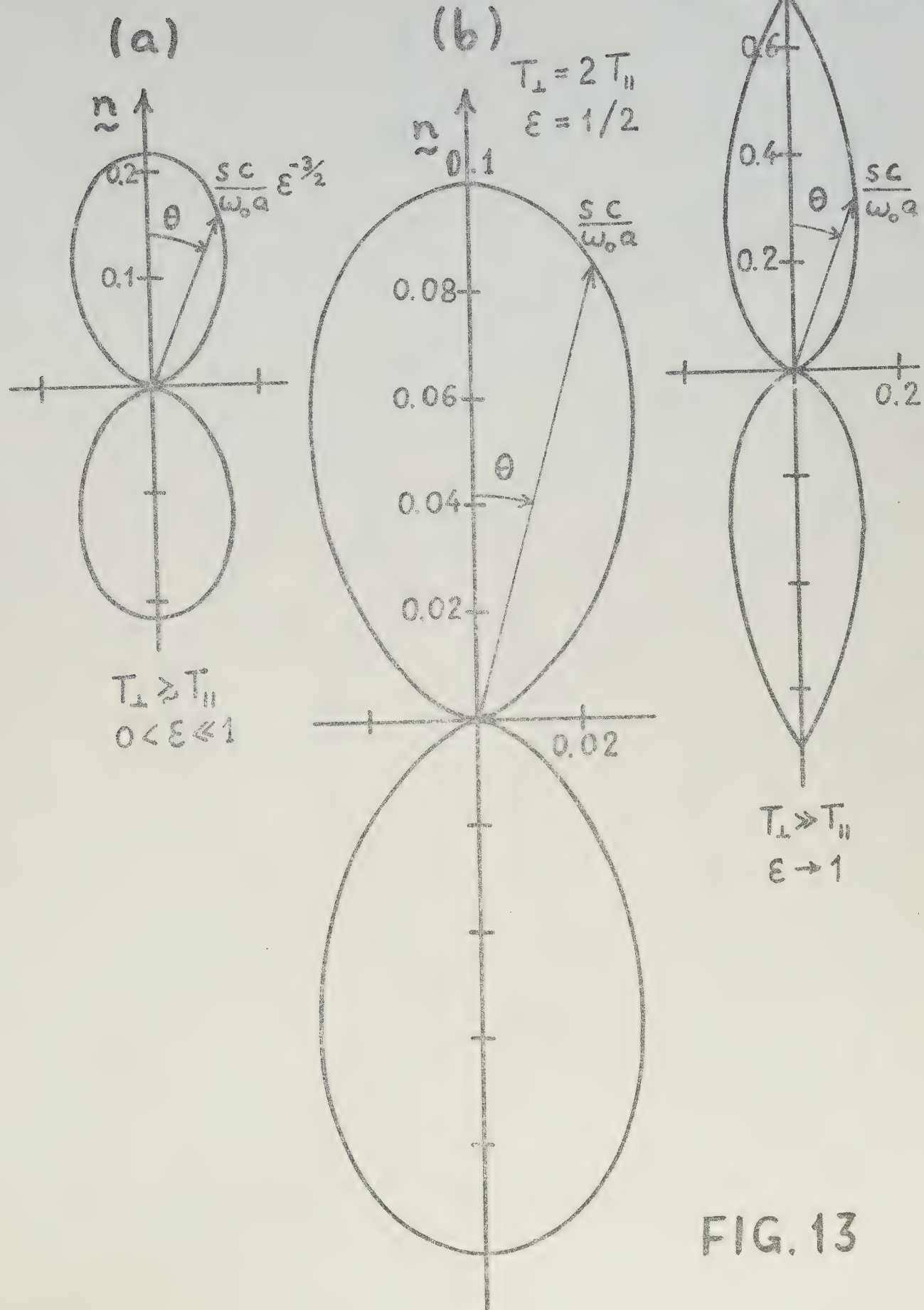


FIG. 13

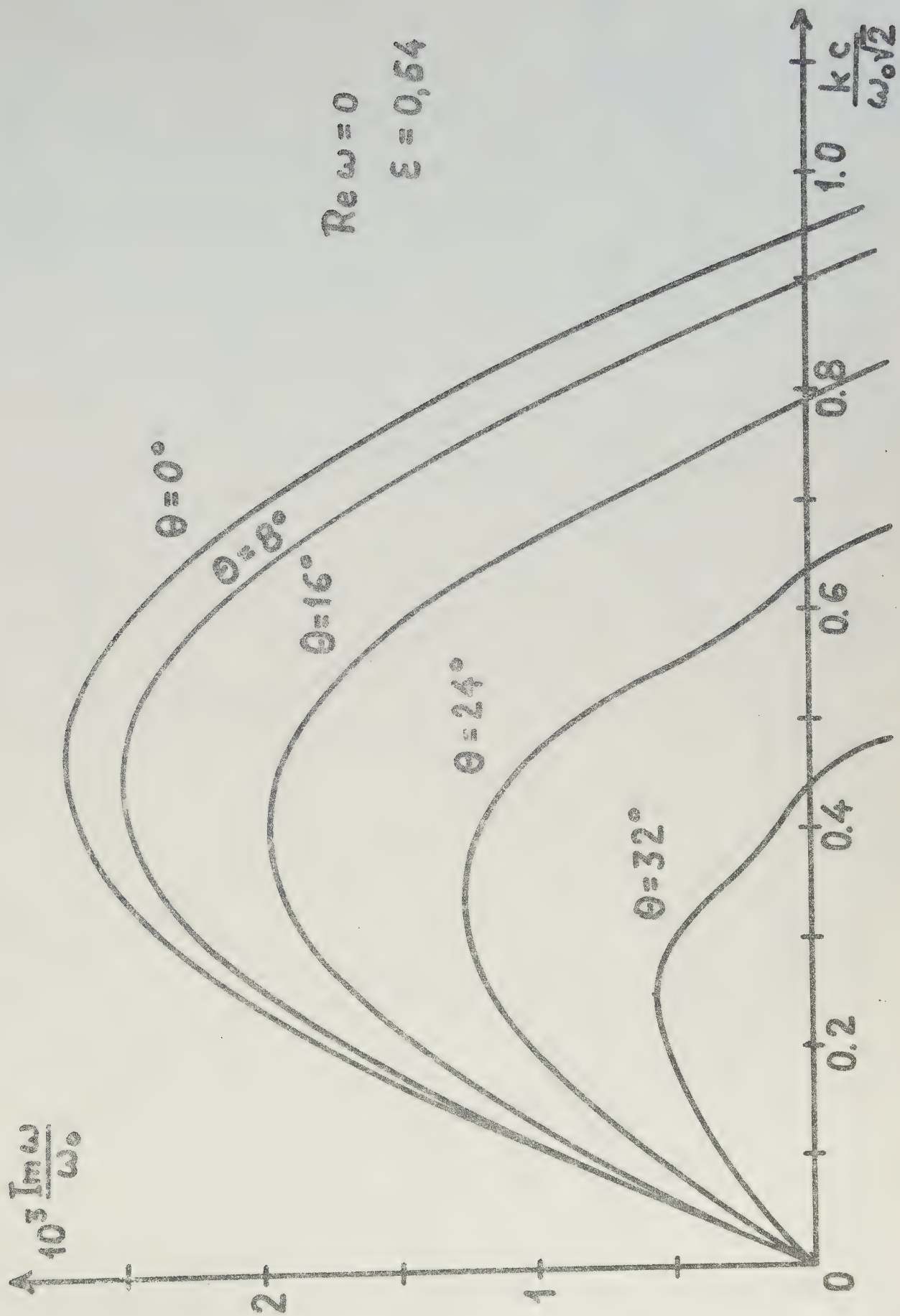


FIG. 16

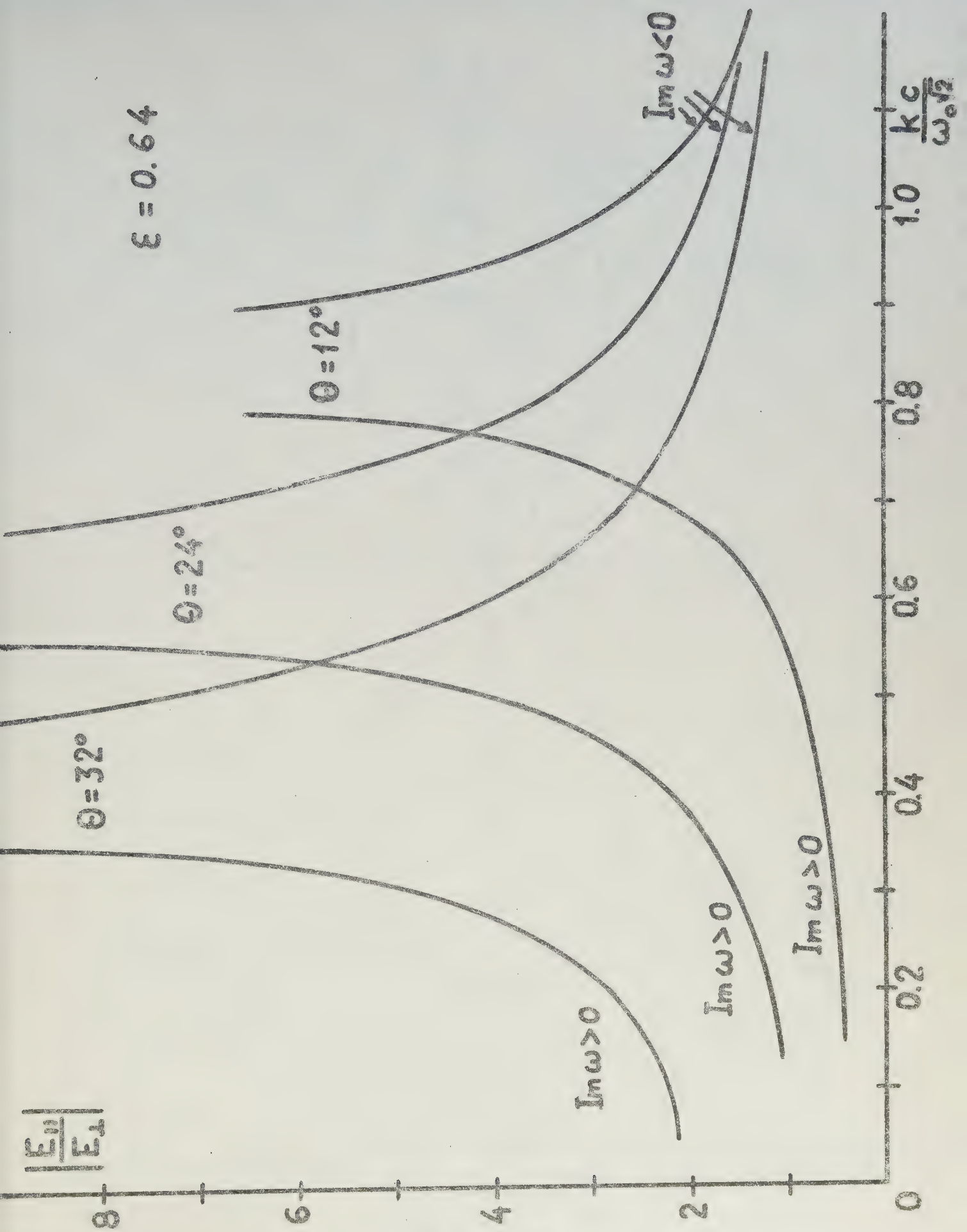


FIG. 17

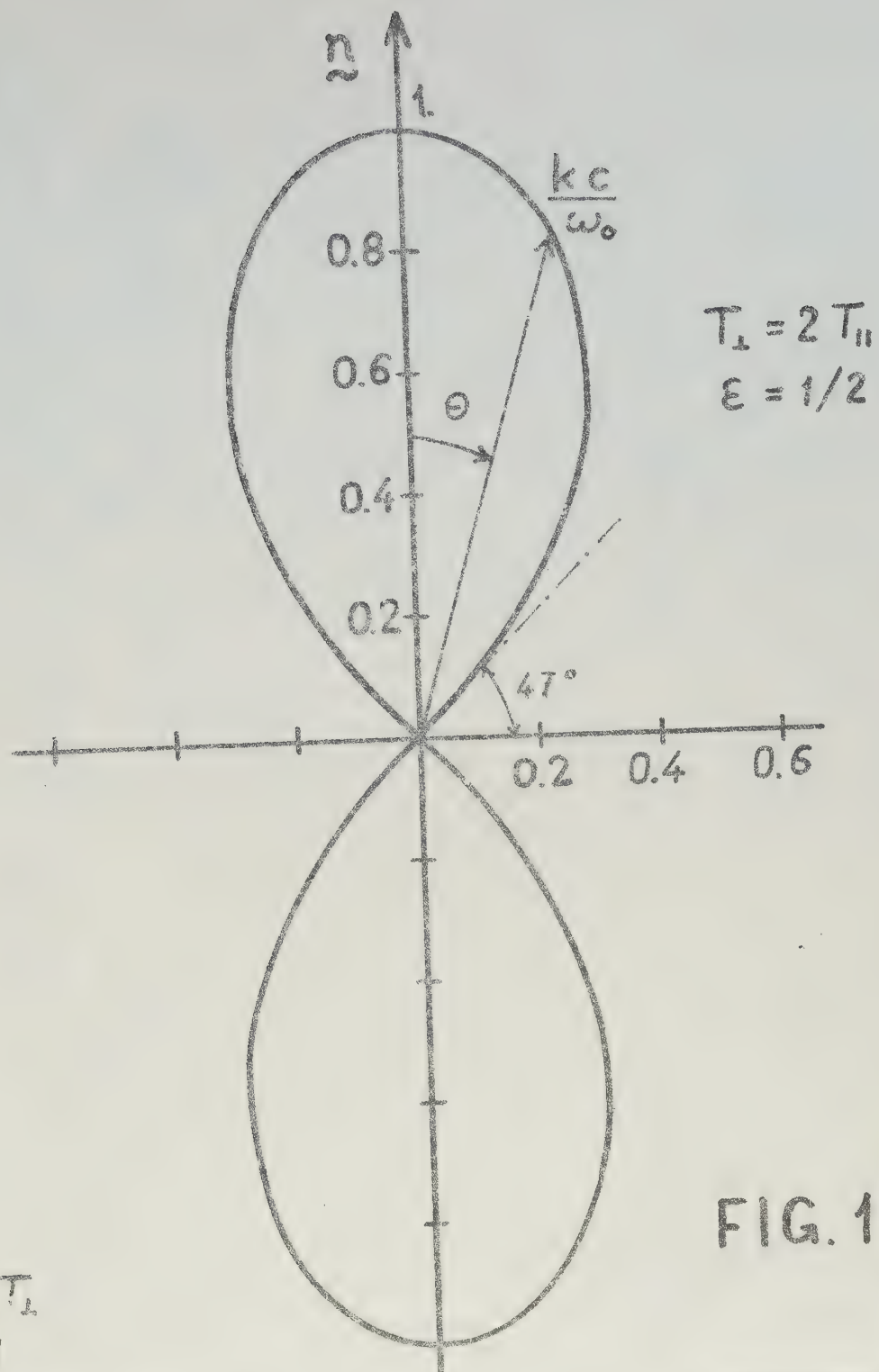
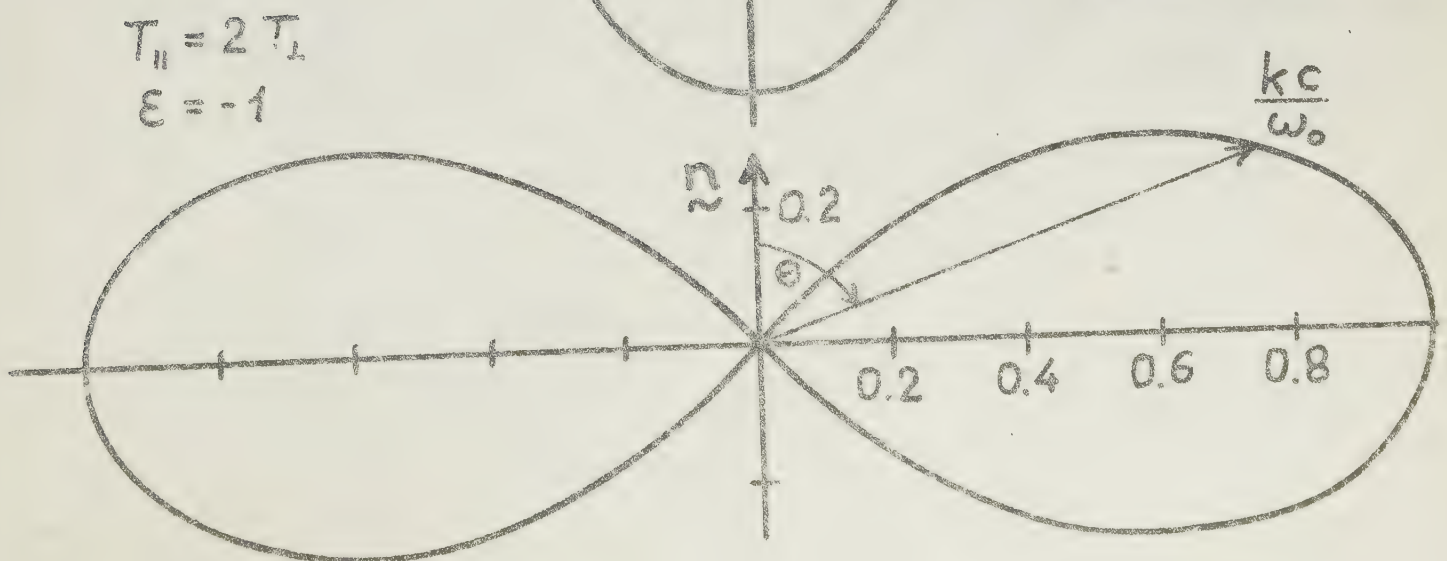


FIG. 18 (b)



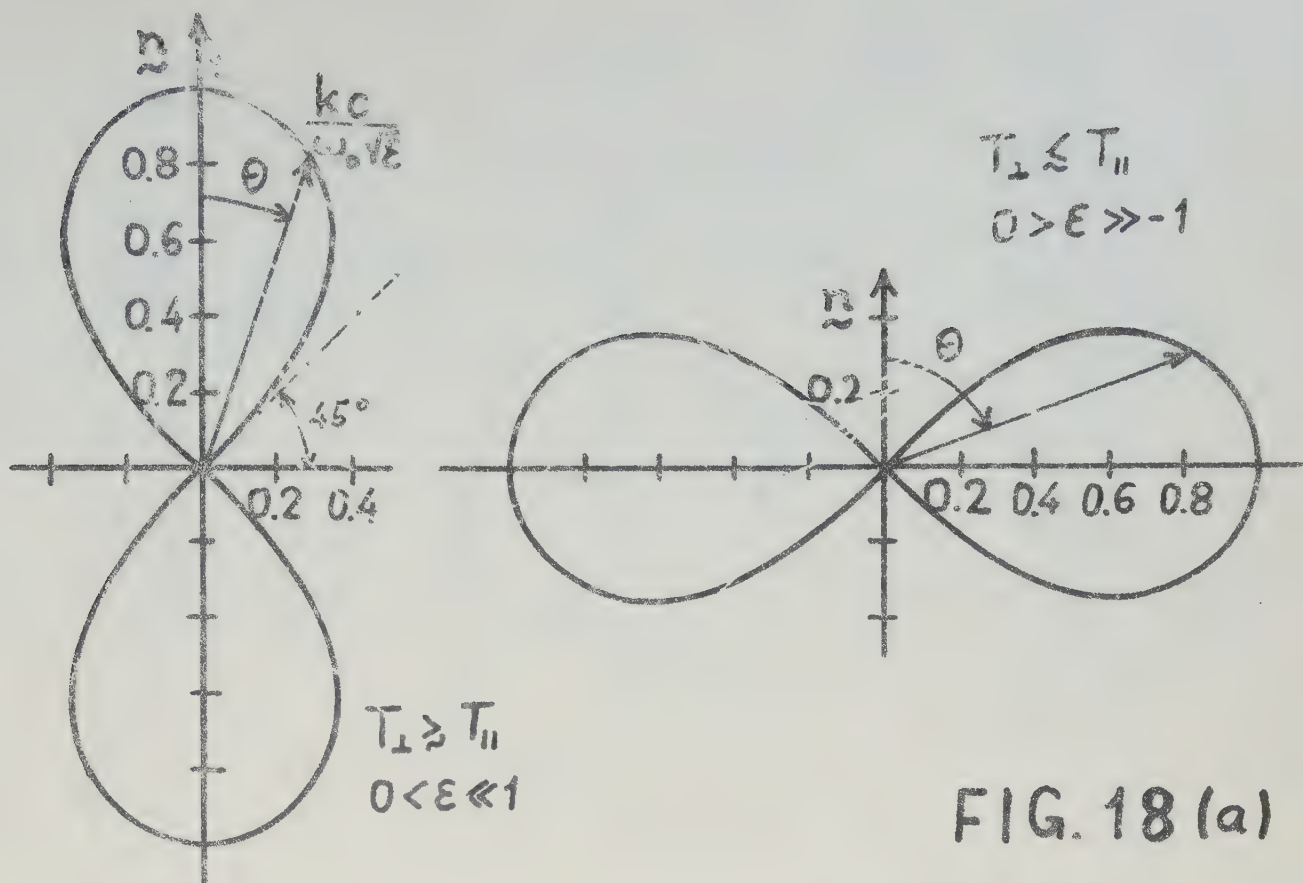


FIG. 18 (a)

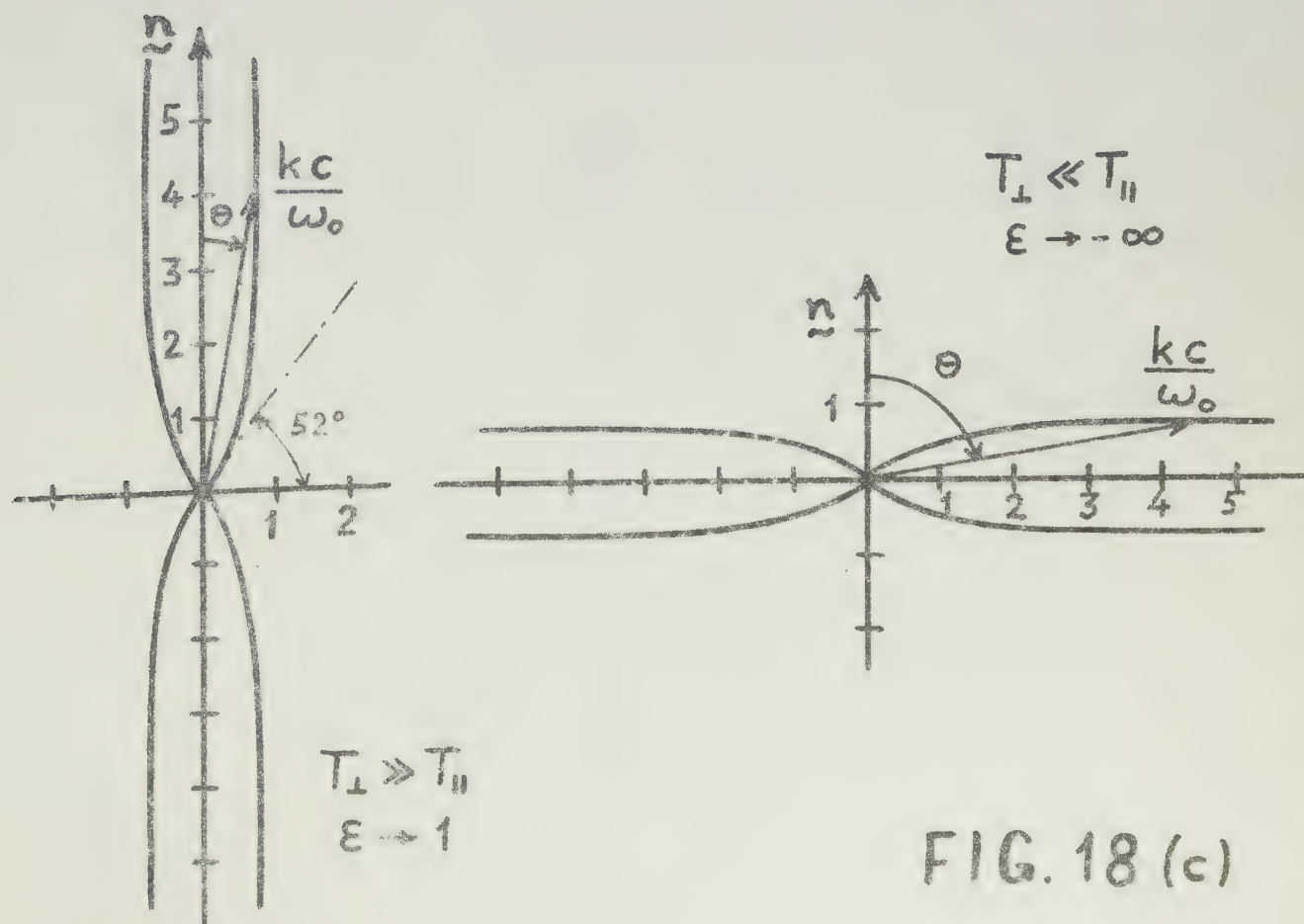


FIG. 18 (c)

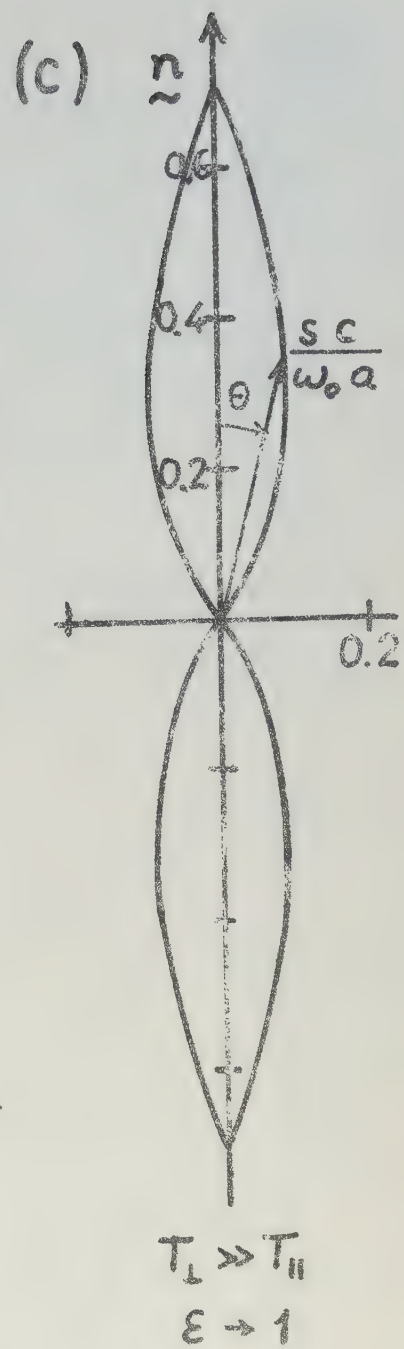
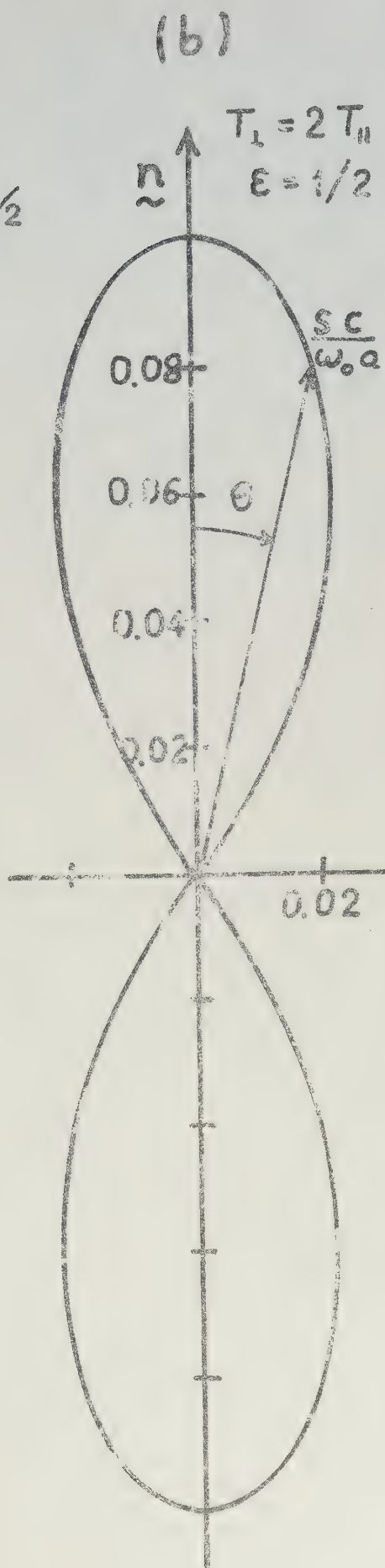
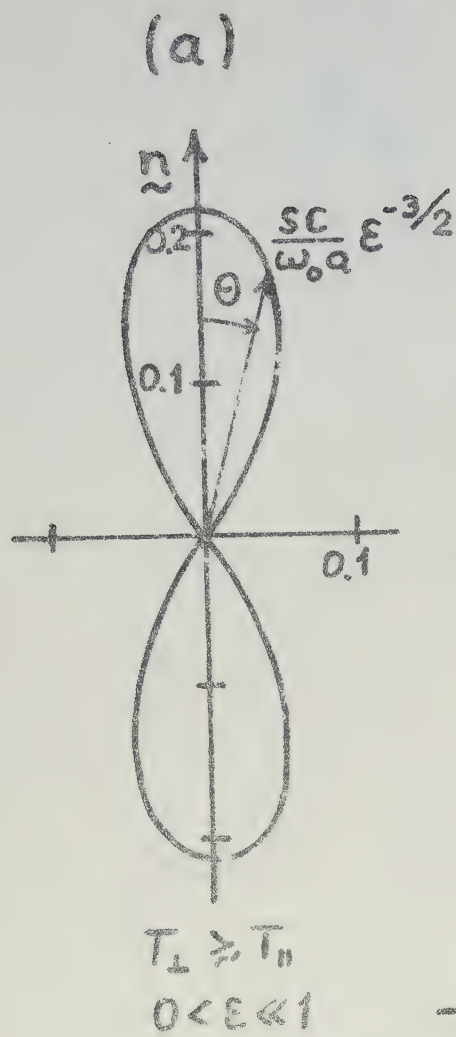


FIG. 19

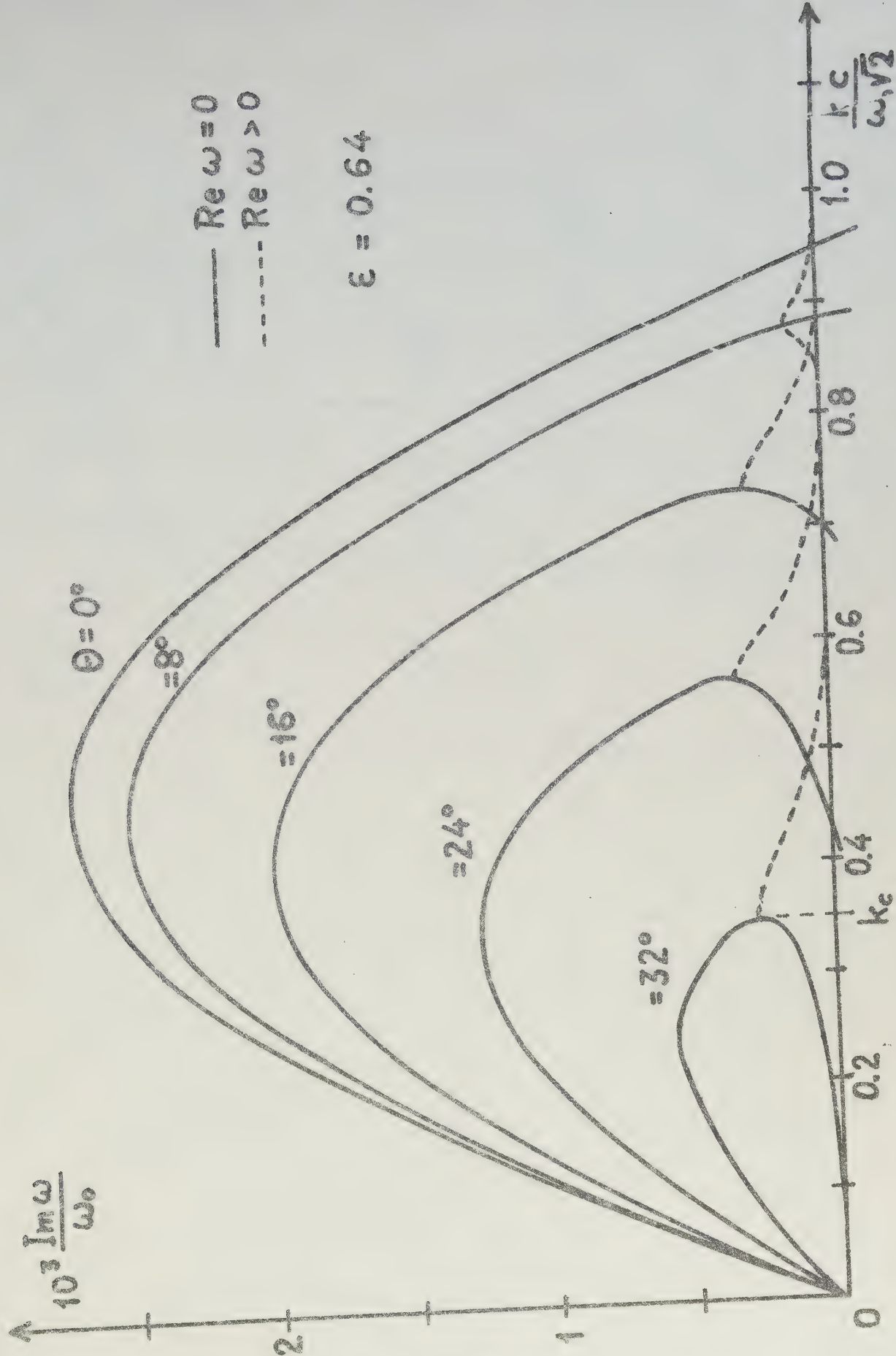


FIG. 20

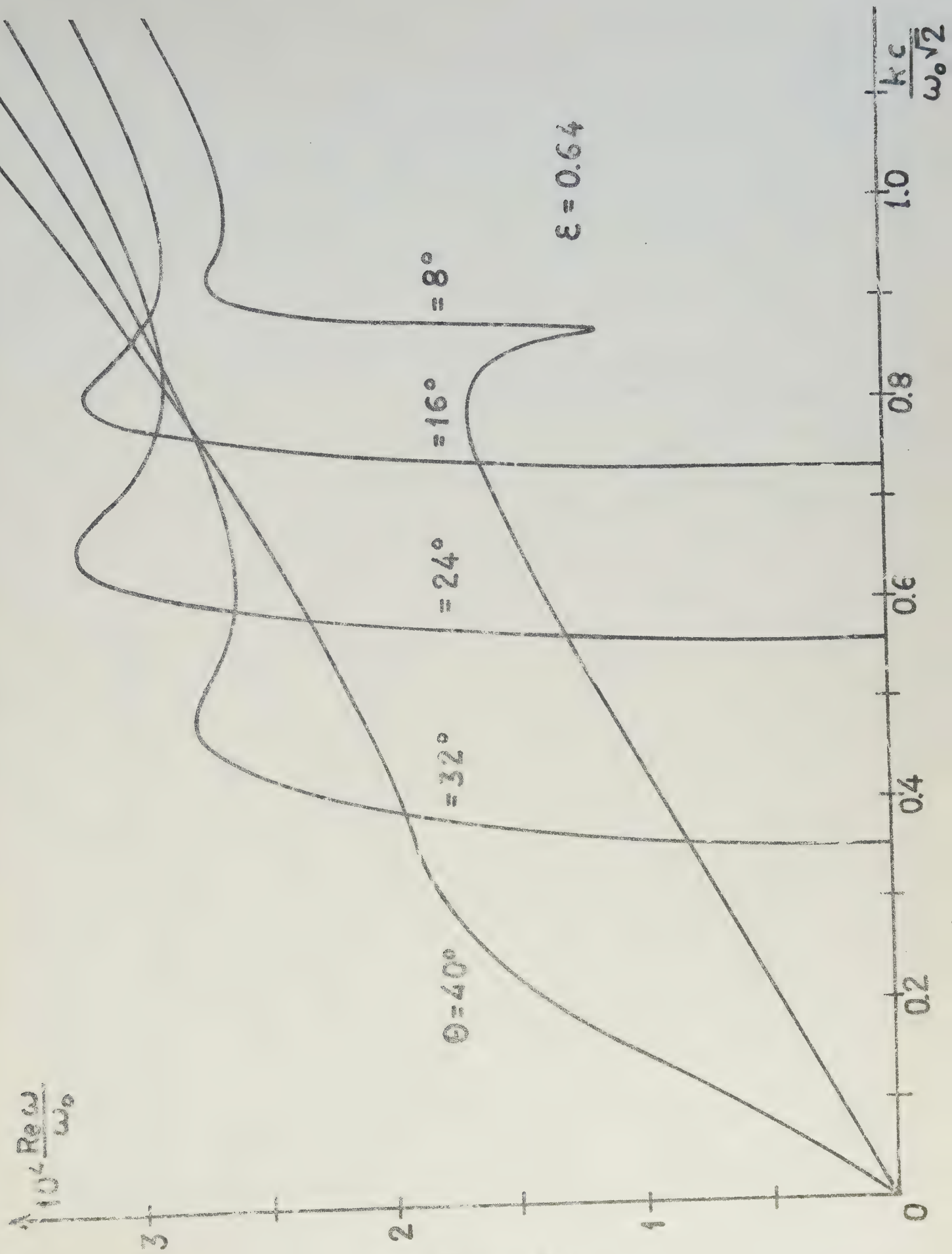


FIG 21

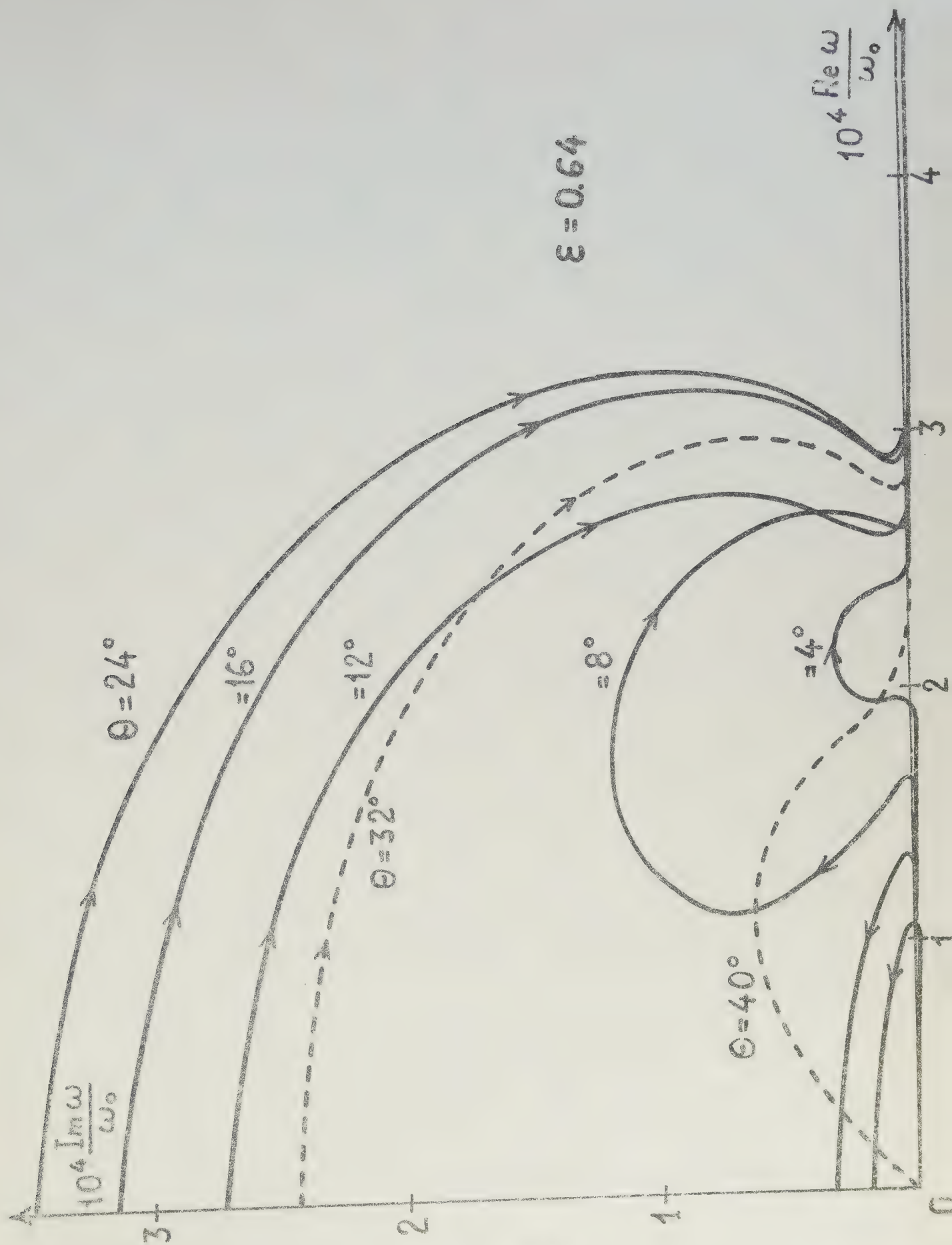


FIG. 22

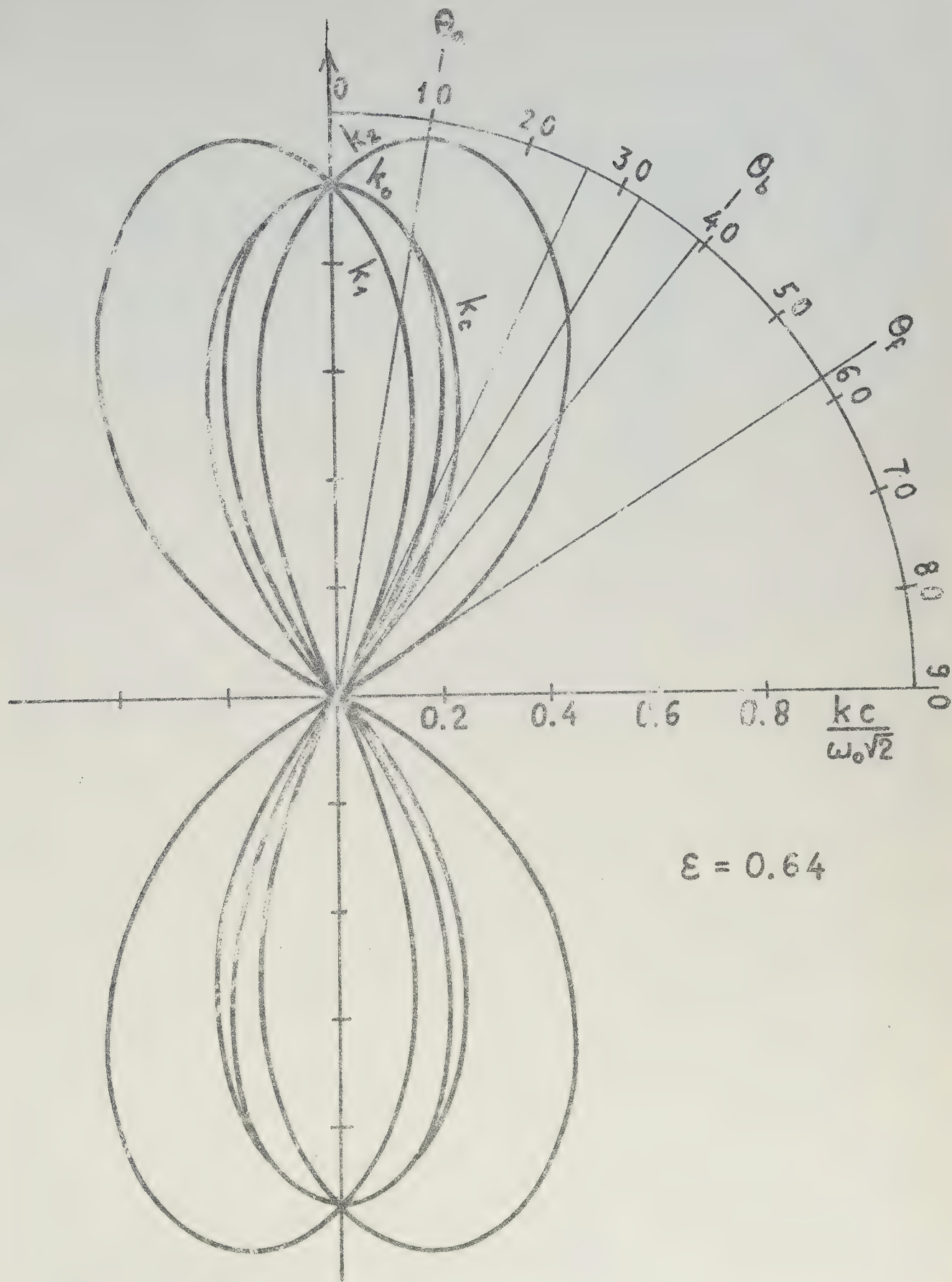


FIG. 23

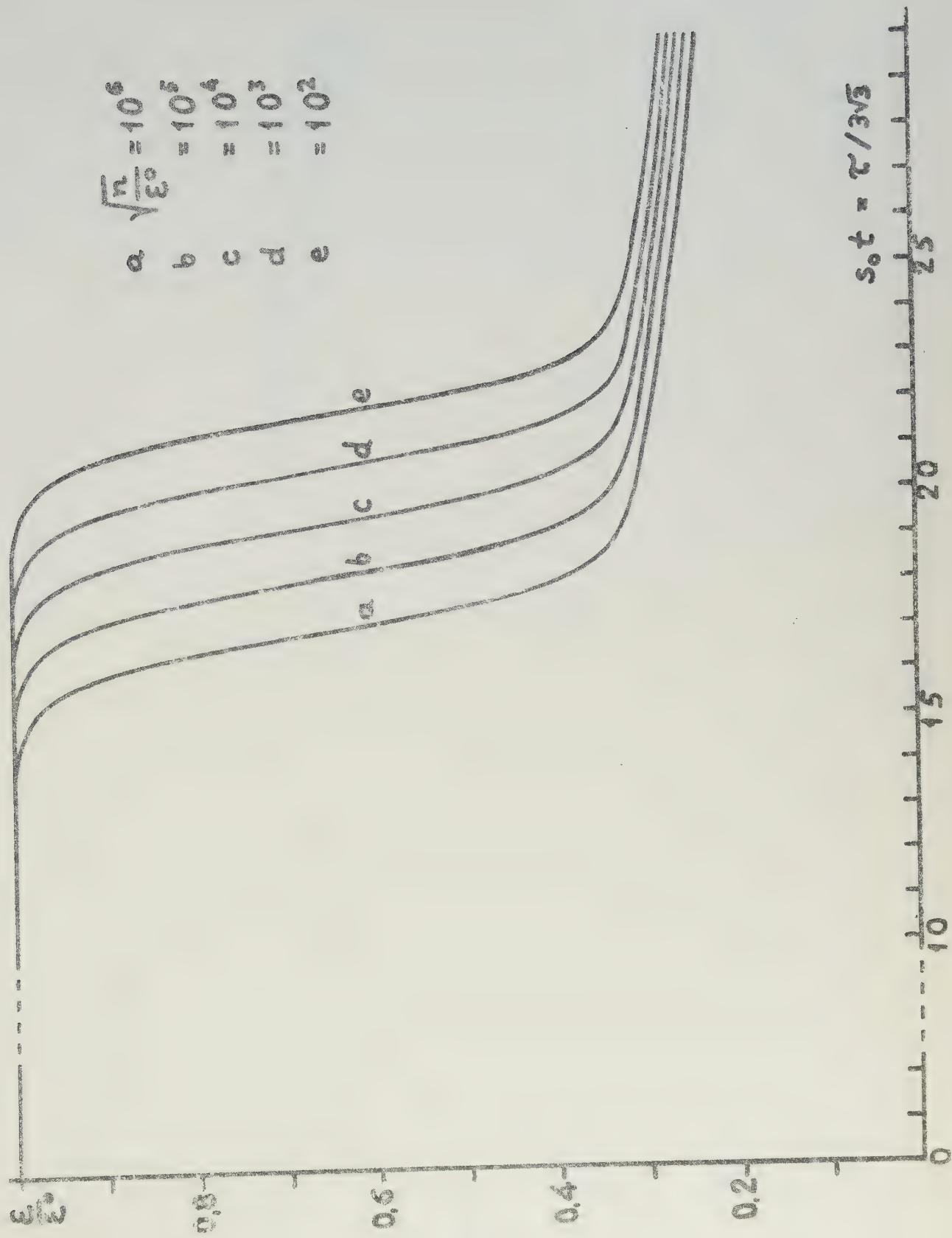


FIG. 24

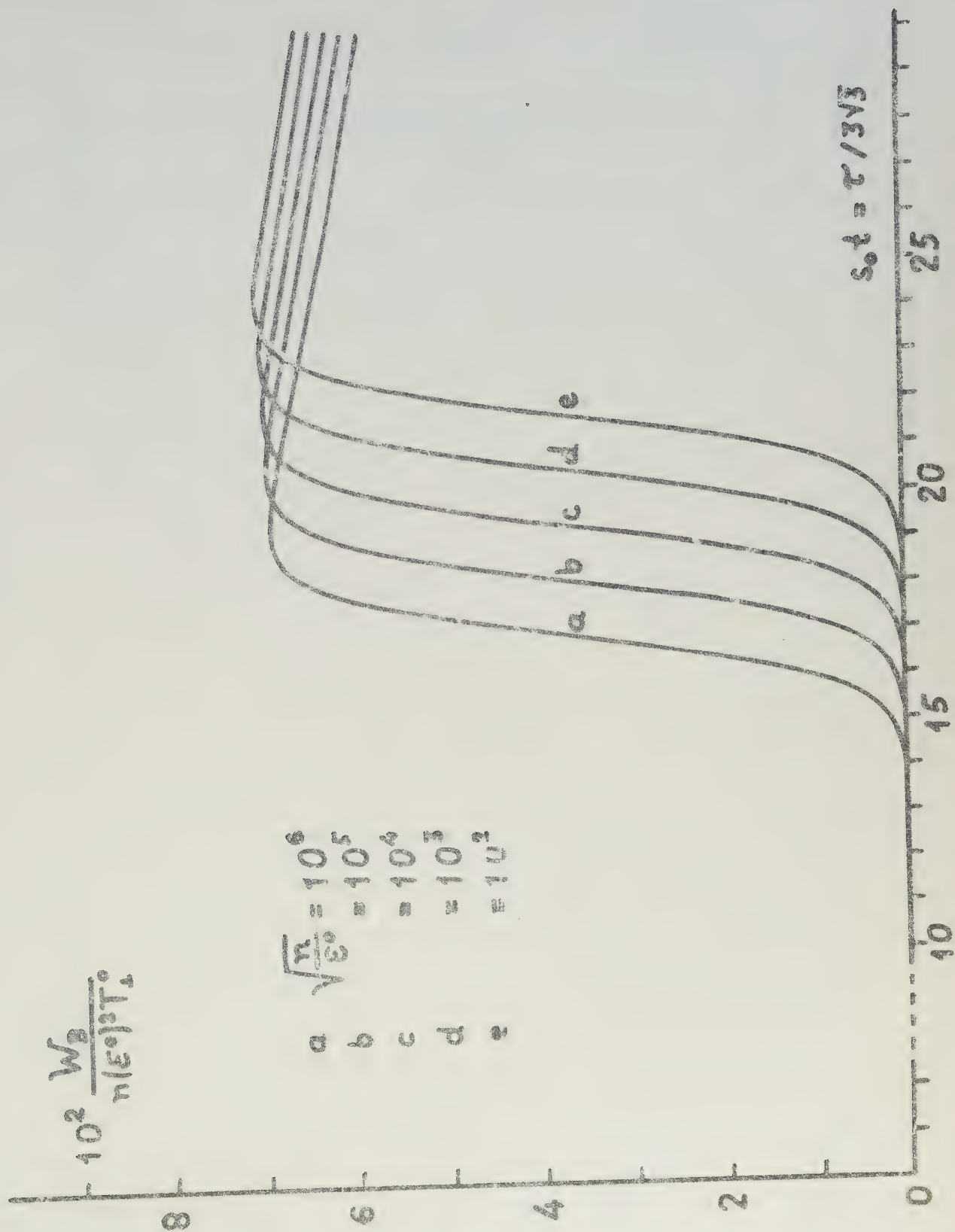


FIG. 25 (a)

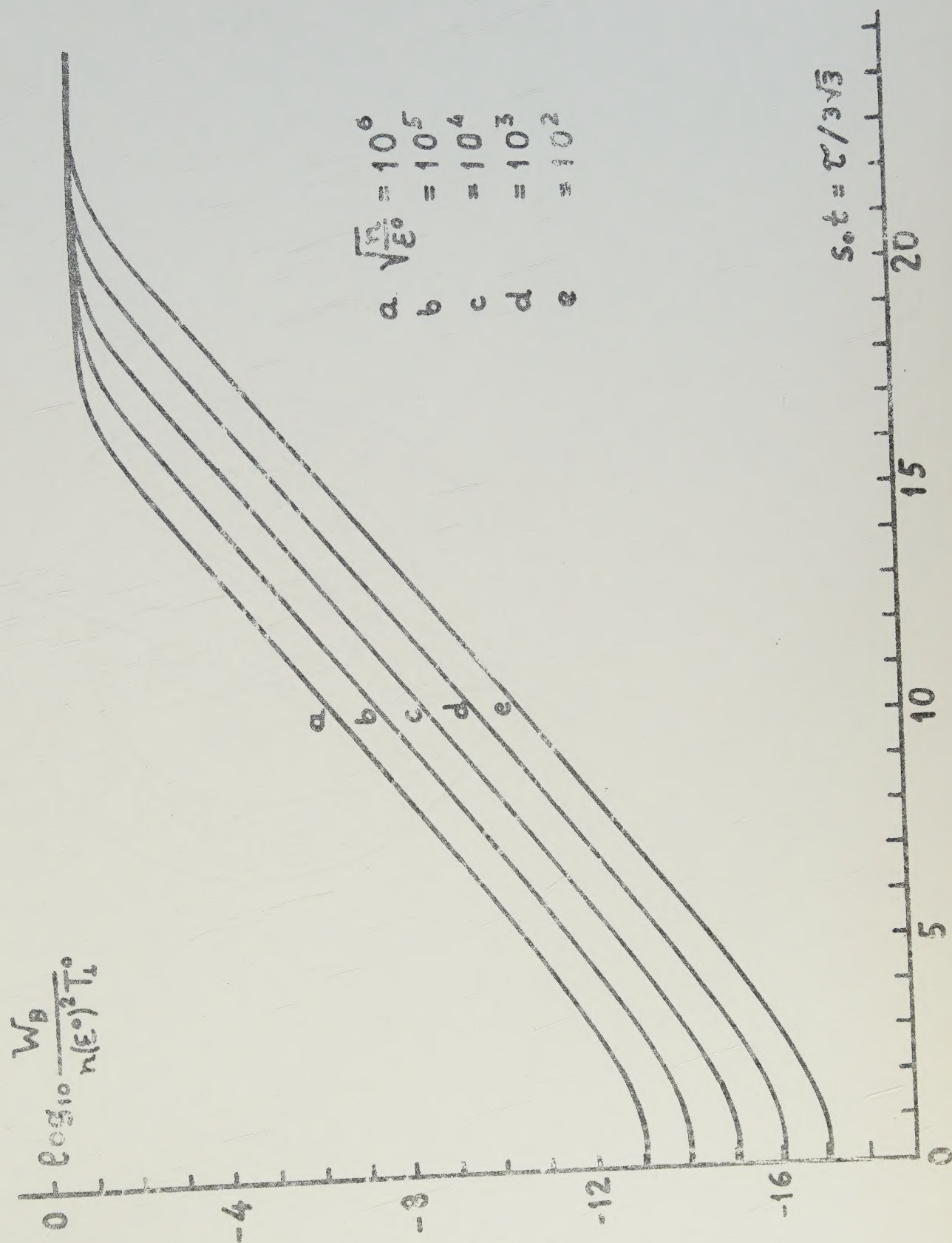


FIG. 25 (b)

